چکیده مبسوط مقالات

دوازدهمین سمینار هندسه و توپولوژی

۲-۱ مرداد ۱۴۰۲

دانشگاه تبریز

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

تهیه و تنظیم

دکتر نرگس غفارزاده و دکتر مرتضی فغفوری

حمایت کنندگان

دانشگاه تبریز

انجمن ریاضی ایران

دانشگاه بناب

دانشگاه شهید مدنی

صندوق پژوهش و فناوری غیر دولتی استان آذربایجان شرقی

کارخانه حوله آذر ریس تبریز

اعضای کمیته اجرایی سمینار

دکتر مرتضی فغفوری	دبیر سمینار
دکتر اصغر رنجبری	دبیر اجرایی سمینار
دکتر جلال شیری	معاون پژوهش و فن آوری دانشگاه تبریز
دکتر سعید شجاعی	مدیر روابط بین المللی دانشگاه تبریز
دکتر حمیدرضا مراثی	رئیس دانشکده
دکتر حبیب ایزدخواه	معاون پژوهش و فن آوری دانشکده
دکتر پرویز سهندی	مدیر گروه ریاضی محض
دکتر نرگس غفارزاده	مسئول دبیرخانه سمینار
دکتر حمید موسوی	
دکتر جعفر احمدی شالی	
دکتر علی حاجی بدلی	
دکتر قربانعلی حقیقت دوست	
آقای امید دلیری	

اعضای کمیته علمی سمینار

دکتر مگردیچ تومانیان	نماینده انجمن ریاضی ایران
دکتر ابراهیم پوررضا	دانشگاه تبریز
دکتر مرتضی فغفوری	دانشگاه تبریز—دبیر علمی
دکتر اکرم محمدپوری	دانشگاه تبریز
دکتر اصغر رنجبری	دانشگاه تبریز
دکتر پرویز سهندی	دانشگاه تبریز
دکتر بهمن رضایی	دانشگاه ارومیه
دکتر هادی زارع	دانشگاه تهران
دکتر قربانعلی حقیقت دوست	دانشگاه شهید مدنی
دکتر اسماعیل عابدی	دانشگاه شهید مدنی
دکتر علی حاجی بدلی	دانشگاه بناب
دکتر فیروز پاشایی	دانشگاه مراغه
دکتر داریوش لطیفی	دانشگاه محقق اردبیلی
دکتر اکبر طیبی	دانشگاه قم
دکتر سهراب عظیم پور	دانشگاه فرهنگیان تبریز

مقالات

ایزومتری‌های ابررویه‌های مینیمال در فضا-زمان ایستای متقارن کروی

اکرم محمدپوری و زهرا غفارزاد قویدل

چکیده. در این مقاله میدان‌های برداری کیلینگ برای لاگرانژین ابررویه با سطح مینیمم تحت حجم ثابت در یک رده خاص از فضا-زمان‌های ایستای متقارن کروی را به‌دست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: تقارن‌های نوتر، فضا-زمان ایستای متقارن کروی، لاگرانژین.

۱. مقدمه

شوارتز شیلد جواب دقیق اول از معادلات میدانی انیشتین را به‌دست آورد و نشان داد که یک جواب ایستای متقارن کروی است. اهمیت فضا-زمان‌های متقارن کروی به خاطر کمک به درک پدیده سقوط گرانشی و سیاه‌چاله‌هاست.
در تعدادی از مقالات [۱، ۵، ۱۱] نشان داده شده است که تقارن‌های لی معادلات ژئودزیک عناصر جبری تصویری فضا هستند. علاوه بر این چون معادلات ژئودزیک از لاگرانژین ژئودزیک نتیجه می‌شود، ریاضی‌دانان تقارن‌های نوتر این لاگرانژین را مطالعه کرده‌اند و نشان داده‌اند که تقارن‌های نوتر عناصر جبر تجانسی فضا هستند [۱۰]. مطالعه تقارن‌های نوتر به خاطر کاهش دو برابری تعداد معادلات حرکت بسیار مهم هستند. اگر تعداد کافی از تقارن‌های نوتر موجود باشد می‌توان معادلات ODE را به انتگرال‌گیری تبدیل کرد.
این مطالعات به تقارن‌های لی و نوتر کلاس‌های خاصی از معادلات دیفرانسیل جزئی $(PDEs)$ [۴، ۶، ۸] تعمیم داده شده است و نشان داده شده که مولدها تشکیل گروه همدیس فضای زمینه را می‌دهند.
تقارن‌های نقطه‌ای نوتر، تقارن‌های عمل انتگرال هستند، بنابراین این اصل به همه مسائل مربوط به عمل انتگرال مربوط می‌شود، حتی اگر مسأله مربوط به معادلات حرکت نباشد. مسأله دیگر تعیین ابررویه با سطح مینیمم تحت حجم ثابت در یک فضا-زمان است. در این مورد عمل انتگرال به مینیمم‌سازی رویه می‌پردازد و مانند حالت حل معادلات حرکت دارای طول قوس نیست [۲، ۳، ۹، ۱۲]. در [۲، ۱۲] نویسندگان بین تقارن‌های نوتر، لاگرانژین مینیمال و ایزومتری‌های فضای زمینه برای برخی فضاهای خاص رابطه‌ای یافته‌اند.
مشابه مقالات ذکر شده هدف از این مقاله نیز تعیین تقارن‌های نقطه‌ای نوتر ابررویه با سطح مینیمم تحت ثابت در فضا-زمان ایستای متقارن کروی است. نشان می‌دهیم مولدهای تقارن‌های نوتر عناصر جبر کیلینگ هستند.
یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل به فرم $\Delta(x,u^{(n)})=0$ که شامل p متغیر مستقل $x=(x^1,\dots,x^p)$ و q متغیر وابسته $u=(u^1,\dots,u^q)$ می‌باشد را در نظر می‌گیریم. جواب چنین دستگاهی، تابعی به فرم $u=f(x)$ می‌باشد که در آن

$$u^\alpha=f^\alpha(x^1,\dots,x^p),\qquad \alpha=1,\dots,q, \tag{1.1}$$

تابعی هموار از متغیرهای مستقل $x=(x^1,\dots,x^p)$ است.
فرض کنید که x معرف یک دستگاه مختصات روی $X\simeq\mathbb{R}^p$ و u یک دستگاه مختصات روی $U\simeq\mathbb{R}^q$ باشد. در این‌صورت فضای اقلیدسی $E=X\times U\simeq\mathbb{R}^{p+q}$ که متشکل از متغیرهای مستقل و وابسته x و u می‌باشد، فضای کل متناظر دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta=0$ گفته می‌شود. یک گروه تقارن برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta=0$، گروهی موضعی از تبدیلات مانند G می‌باشد که روی یک مجموعه بازی از E مانند $\mathcal{O}$ عمل نموده به‌طوری‌که هر جواب از دستگاه $\Delta=0$ را به جواب دیگری تبدیل می‌نماید.

رده بندی موضوعی۲۰۱۰: ۳۵B۰۶،۷۰H۳۳ .
سخنران: زهرا غفارزاد قویدل .

فرض کنید

$$U^{(n)} := U \times U_۱ \times \ldots \times U_n, \qquad (۲.۱)$$

به‌طوری‌که U_iها به‌ازای $i = ۱, \ldots, n$ نماینده فضای مشتقات جزیی از مرتبهiام می‌باشند. با اضافه نمودن فضای متغیرهای مستقل به $U^{(n)}$، فضای

$$\mathbf{J}^n = X \times U^{(n)} \qquad (۳.۱)$$

به‌دست می‌آوریم که به آن فضای جت مرتبه nام تابع $u = f(x)$ گفته و آن را با نماد $\mathbf{J}^n f$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۱. *فرض کنیم*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=۱}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=۱}^{q} \phi_\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

یک میدان برداری روی زیرمجموعه باز $\mathcal{O} \subset E$ باشد. امتداد مرتبه n-ام میدان برداری $\mathbf{v}$ یک میدان برداری به شکل

$$\mathbf{v}^{(n)} = \mathbf{v} + \sum_{\alpha=۱}^{q}\sum_{J} \phi_\alpha^J(x,u^{(n)})\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \qquad (۴.۱)$$

روی $\mathbf{J}^n(\mathcal{O})$ می‌باشد که ضرایب ϕ_α^J در (۴.۱) با فرمول

$$\phi_\alpha^J(x,u^{(n)}) = D_J\left(\phi_\alpha - \sum_{i=۱}^{p}\xi^i u_i^\alpha\right) + \sum_{i=۱}^{p}\xi^i u_{J,i}^\alpha \qquad (۵.۱)$$

ساخته می‌شوند.

تقارن‌های تغییراتی به خاطر قضیه معروف نوتر از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در سال ۱۹۱۸ نوتر [۷] الگوریتم مشهور خود (قضیه نوتر) را برای یافتن قوانین پایستگی موضعی برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیلی که تقارن‌های تغییراتی را می‌پذیرند، ارائه نمود.
تابعک $J[\Phi]$ با n متغیر مستقل $x = (x^۱, \ldots, x^n)$ و تابع هموار $\Phi = \Phi(x) = (\Phi^۱, \Phi^۲, \ldots, \Phi^m)$ و مشتقات آن تا مرتبه k، که روی دامنه Ω تعریف شده‌اند را در نظر بگیرید.

$$J[\Phi] = \int_\Omega L[\Phi]dx = \int_\Omega L(x, \Phi, \partial\Phi, \ldots, \partial^k\Phi)dx,$$

تابع $L[\Phi]dx = L[x, \Phi, \partial\Phi, \ldots, \partial^k\Phi]$ را لاگرانژین و تابعک $J[\Phi]$ را انتگرال تغییراتی می‌نامند.
حال فرض کنید M^n یک فضا-زمان با متر زیر باشد

$$ds^۲ = -du^۲ + h_{ij}(u, x_k)dx^i dx^j, \qquad i,j = ۱, \ldots, n-۱. \qquad (۶.۱)$$

از اینرو مشاهده می‌شود [۱۲] لاگرانژین ابررویه با سطح مینیمال و با در نظر گرفتن حجم ثابت در رابطه زیر صدق می‌کند

$$L = \sqrt{-|h| + |h|h^{ij}u_{,i}u_{,j}} + \lambda\int\sqrt{|h|}du. \qquad (۷.۱)$$

لاگرانژین ابررویه $r = r(t,\theta,\phi)$ در کلاس خاص از فضا-زمان ایستای متقارن کروی با متر

$$ds^۲ = e^{\frac{r}{b}}dt^۲ - dr^۲ - (\dot\theta^۲ + \sin^۲\theta\dot\phi^۲). \qquad (۸.۱)$$

با جایگذاری در فرمول (۷.۱) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$L = \sin\theta e^{\frac{r}{۲b}}\left(\sqrt{-۱ + e^{\frac{-r}{b}}r_{,t}^۲ - r_{,\theta}^۲ - csc^۲\theta r_{,\phi}^۲} + ۲b\lambda\right). \qquad (۹.۱)$$

در حالت کلی تقارن نقطه‌ای نوتر $\mathbf{X} = \xi^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \dfrac{\partial}{\partial u^\alpha}$ با توابع پیمانه‌ای $A^1, \ldots, A^n$ برای لاگرانژین $L(x, \Phi, \Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(k)})$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید [۷]

$$X^{[k]}(L) + LD_i(\xi^i) = D_i(A^i). \tag{۱۰.۱}$$

با جایگذاری روابط در فرمول (۱۰.۱) معادلات مشخصه زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
&\eta_{,r} = 0, \quad e^{\frac{-r}{b}}\eta_{,t} - \xi^1_{,r} = 0, \quad -\eta_{,\theta} + \xi^2_{,r} = 0, \quad -\csc^2\phi\,\eta_{,\phi} + \xi^3_{,r} = 0,\\
&\eta - 2b\xi^1_{,t} = 0, \quad \xi_{,\theta} = 0, \quad \cot\theta\,\xi^2 + \xi^3_{,\phi} = 0, \quad e^{\frac{r}{b}}\xi^1_{,\phi} + \xi^2_{,t} = 0,\\
&e^{\frac{r}{b}}\xi^1_{,\phi} + \sin^2\theta\,\xi^3_{,t} = 0, \quad \xi^2_{,\phi} + \sin^2\theta\,\xi^3_{,\theta} = 0.
\end{aligned}$$

با حل معادلات مشخصه قضیه اساسی زیر اثبات می‌شود.

قضیه ۲.۱. *جبر لی $\mathfrak{g}$ شش بعدی از تقارن‌های نقطه‌ای نوتر برای لاگرانژین ابررویه با سطح مینیمم تحت حجم ثابت در کلاس خاصی از فضا- زمان ایستای متقارن کروی با مختصات (۶.۱) به فرم زیر است، بعلاوه همه مولدها میدان‌های برداری کیلینگ‌اند.*

$$\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad X_3 = \cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}, \quad X_4 = \sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi},\\
&X_5 = t\frac{\partial}{\partial r} - b\left(e^{\frac{-r}{b}} + \frac{t^2}{4b^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}, \quad X_6 = \frac{\partial}{\partial r} - \frac{t}{2b}\frac{\partial}{\partial t}.
\end{aligned}$$

۲. نتایج اصلی

در این مقاله لاگرانژین ابررویه با سطح مینیمم را در فضا-زمان ایستای متقارن کروی تعیین کردیم. علاوه بر آن نشان دادیم که تقارن‌های نقطه‌ای نوتر از این لاگرانژین، عناصر جبر کیلینگ هستند که معادلات لاگرانژ آن بیان شد. از طرفی باتوجه به اینکه از تقارن‌های نوتر قوانین پایستگی حاصل می‌شود، که در تقلیل مرتبه معادلات دیفرانسیل استفاده می‌شود، پس اگر تقارن‌های نوتر کافی به‌دست آید، این امکان به‌وجود می‌آید که جواب معادله ابررویه با سطح مینیمم به یک انتگرال‌گیری تبدیل شود.

مراجع

[1] A. V. Aminova and N. Aminov. Projective geometry of systems of differential equations: general conceptions. Tensor, **62** (2000), 65-74.

[2] A. Aslam and A. Qadir. Noether symmetries of the area-minimizing Lagrangian . Journal of Applied Mathematics, 2012, 532-690.

[3] N. Bila. Lie groups applications to minimal surfaces PDE. Universitatea Aristotle, Thessaloniki, Greece, Presented at the second conference of Balkan society of geometer, 1998.

[4] Y. Bozhkov and I. L. Freire. Special conformal groups of a Riemannian manifold and Lie point symmetries of the nonlinear Poisson equation. Journal of Differential Equations, **249**(4): (2010), 872-913.

[5] T. Feroze, F. M. Mahomed and A. Qadir. The connection between isometries and symmetries of geodesic equations of the underlying spaces. Nonlinear Dynamics, **45**(1) (2006),65-74.

[6] I. L. Freire. On the paper 'Symmetry analyysis of wave equation on sphere' by H. Azad and M. T. Mustafa. Journal of Mathematical Analysis and Applications, **367** (2010), 716-720.

[7] E. Noether. Invariante variations probleme. Nachr. Akad. Wiss. Gott. Math. Phys. Kl, 2: 235-257, 1918. (English trannslation in Transp. Theory Stat. Phys., **1**(3) (1971), 186-207.

[8] A. Paliathanasis and M. Tsamparlis. Lie point symmetries of a general class of PDEs: The heat equation. Journal of Geometry and Physics, **62**(12): (2012), 2443-2456.

[9] A. Peterson and S. Taylor. Locally isometric families of minimal surfaces. Balkan Journal of Geometry and Its Applications, **13**(2):, (2008), 80-86.

[10] M. Tsamparlis and A. Paliathanasis, Lie and Noether symmetries of geodesic equations and collineations General Relativity and Gravitation,**42** (2010), 2957-2980.

[11] M. Tsamparlis and A. Paliathanasis, Lie symmetries of geodesic equations and projective collineations. Nonlinear Dynamics, **62**(1):(2010), 203-214.
[12] M. Tsamparlis and A. Paliathanasis and A. Qadir. Noether symmetries and isometries of the minimal surface Lagrangian under constant volume in a Riemannian space. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, **12**(1):1550003,2015.

گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران.
آدرس پست الکترونیکی: pouri@tabrizu.ac.ir

گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران.
آدرس پست الکترونیکی: z.ghafarzadeh93@gmail.com

تقارن‌ها و قوانین بقاء معادلات ژئودزیک فضا زمان ایستای متقارن استوانه‌ای

اکرم محمدپوری و سید علی‌رضا جامعی

چکیده. کلی‌ترین شکل فضا زمان ایستای متقارن استوانه‌ای به فرم زیر است

$$ds^۲ = e^{\nu(r)}dt^۲ - dr^۲ - e^{\mu(r)}b^۲d\theta^۲ - e^{\lambda(r)}dz^۲, \qquad (۱.۰)$$

که در آن b مقدار ثابت است. در این مقاله ما تقارن‌های معادلات ژئودزیک وابسته به این فضا زمان را پیدا کرده و سپس قوانین بقاء متناظر با تقارن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: ایستای متقارن استوانه‌ای، تقارن‌ها، قوانین بقاء .

۱. مقدمه

در اواخر قرن نوزدهم سوفوس لی شروع به مطالعه گروه‌های لی به منظور توسعه سیستماتیک روش‌های حل معادلات دیفرانسیل کرد. بنابر نظریه اساس لی مسئله پیدا کردن گروه تبدیلات نقطه‌ای که تحت معادله دیفرانسیل ناوردا است، به حل دستگاه خطی وابسته از معادلات مشخصه برای مولدهای بینهایت کوچک تقلیل می یابد. این گروه در نظریه لی شامل تبدیلات هندسی است که روی مجموعه جواب با تبدیل نمودارهایشان عمل می‌کند. بسیاری از خواص دستگاه و جواب‌هایش از طریق گروه تقارنی بدست می‌آید. تعیین گروه ناوردای جواب‌ها، ساختن جواب جدید برای دستگاه از این مجموعه، رده‌بندی گروه ناوردا جواب‌ها، تقلیل رتبه معادلات دیفرانسیل معمولی، پیدا کردن تبدیلات خطی و تصویرکردن جواب‌ها به جواب‌های دیگر از کاربردهای ارزشمند گروه‌های لی در نظریه معادلات دیفرانسیل است. برای مطالعه تعداد زیادی از کاربردهای تقارن‌ها خواننده به مراجع [۲، ۴، ۶] رجوع کند. تقارن‌ها، نقش اساسی و مهم در فیزیک به ویژه در ساده سازی جواب‌های مسائل مختلف دارد. به ویژه کاربرد آنها در تحلیل جواب‌های دقیق معادلات انیشتینی در نسبیت عام غیر قابل انکار است. تقارن‌ها اغلب باعث حفظ برخی خواص هندسی می‌شوند. به عنوان مثال در نسبیت عام حافظ تانسور انحناء، تانسور متر و ژئودزیک‌های فضا زمان هستند. تعریف دقیق تقارن‌ها عام به طور جامع در مرجع [۳] بر اساس کاربردی از میدان‌های برداری و شارهای موضعی بیان شده است. میدان‌های برداری تقارنی تحت عمل کروشه لی تشکیل جبر لی می‌دهد. در این مقاله تقارن‌های لی و قوانین بقاء معادلات ژئودزیک برای فضا زمان‌های ایستای متقارن استوانه‌ای بدست می‌آوریم. این فضا زمان‌ها متقارن محوری هستند(متقارن حول یک محور نامتناهی) و متقارن انتقالی، حول محور نامتناهی داده شده (در اینجا منظور محور z) و زمان هستند.

۲. نتایج اصلی

معادلات ژئودزیک یک فضا-زمان با مختصات $x = (x^۱(s), \ldots, x^n(s))$ تشکیل یک دستگاه از n معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم غیرخطی برای n تابع به‌صورت زیر می‌دهد

$$\frac{d^۲x^a}{ds^۲} = -\Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{ds}\frac{dx^c}{ds}, \quad a = ۱, \ldots, n, \qquad (۱.۲)$$

که در آن s پارامتر زمان و Γ^a_{bc} نمادهای کریستوفل هستند. مولفه‌های ناصفر نمادهای کریستوفل برای حالت خاصی از فضا زمان (۱.۰) با متر

$$ds^۲ = \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a dt^۲ - dr^۲ - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a d\theta^۲ - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^a dz^۲, \quad a \neq ۲ \qquad (۲.۲)$$

رده بندی موضوعی۲۰۱۰: ۵۳A۱۰.

به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\Gamma^{t}_{tr}=\frac{a}{2r},\quad \Gamma^{r}_{tt}=\frac{a}{2\alpha}(\frac{r}{\alpha})^{a-1},\quad \Gamma^{\theta}_{r\theta}=\frac{a}{2r},$$
$$\Gamma^{z}_{rz}=\frac{a}{2r},\quad \Gamma^{r}_{\theta\theta}=-\frac{a}{2\alpha}(\frac{r}{\alpha})^{a-1},\quad \Gamma^{r}_{zz}=-\frac{a}{2\alpha}(\frac{r}{\alpha})^{a-1}.$$

با جایگذاری این نمادها در (۱.۲) معادلات ژئودزیک برای متر (۲.۲) به‌صورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} E_1:\ddot{t}+\frac{1}{2}\frac{a}{r}\dot{t}\dot{r}=0,\\ E_2:\ddot{r}+\frac{a}{2\alpha}(\frac{r}{\alpha})^{a-1}\dot{t}^2-\frac{a}{2\alpha}(\frac{r}{\alpha})^{a-1}\dot{\theta}^2-\frac{a}{2\alpha}(\frac{r}{\alpha})^{a-1}\dot{z}^2=0,\\ E_3:\ddot{\theta}+\frac{a}{2r}\dot{r}\dot{\theta}=0,\\ E_4:\ddot{z}+\frac{a}{2r}\dot{r}\dot{z}=0. \end{cases} \tag{۳.۲}$$

در ادامه با استفاده از روش تقارن‌های لی مولدهای بی‌نهایت کوچک وابسته به دستگاه فوق را بدست می‌آوریم. چون دستگاه فوق یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم است، امتداد دوم از مولد بی‌نهایت کوچک $X=\xi(s,x)\frac{\partial}{\partial s}+\eta^{\alpha}(s,x)\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$ یعنی:

$$X^{(2)}=X+\eta^{\alpha}_{,(1)}(s,x,x^{(1)})\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}_{,(1)}}+\eta^{\alpha}_{,(2)}(s,x,x^{(1)},x^{(2)})\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}_{,(2)}}\quad \alpha=0,\dots,3.$$

را روی دستگاه معادلات ژئودزیک (۳.۲) اثر می‌دهیم. ضرایب امتداد به‌صورت زیر بدست می‌آید.

$$\eta^{0}_{,(1)}=D\eta^{0}-\dot{t}D\xi,\quad \eta^{1}_{,(1)}=D\eta^{1}-\dot{r}D\xi,$$
$$\eta^{2}_{,(1)}=D\eta^{2}-\dot{\theta}D\xi,\quad \eta^{3}_{,(1)}=D\eta^{3}-\dot{z}D\xi. \tag{۴.۲}$$

$$\eta^{0}_{,(2)}=D\eta^{0}_{,(1)}-\ddot{t}D\xi,\quad \eta^{1}_{,(2)}=D\eta^{1}_{,(1)}-\ddot{r}D\xi,$$
$$\eta^{2}_{,(2)}=D\eta^{2}_{,(1)}-\ddot{\theta}D\xi,\quad \eta^{3}_{,(2)}=D\eta^{3}_{,(1)}-\ddot{z}D\xi. \tag{۵.۲}$$

که $D=\frac{\partial}{\partial s}+\dot{t}\frac{\partial}{\partial t}+\dot{r}\frac{\partial}{\partial r}+\dot{\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\dot{z}\frac{\partial}{\partial z}$ و "$\cdot$" نمایش مشتق با پارامتر طول قوس "s" است. با جایگذاری روابط (۴.۲) و (۵.۲) در شرط ناوردای $X^{(2)}E_i|_{E_i=0}=0$ و با مقایسه ضرایب توان‌هایی از $\dot{t},\dot{r},\dot{\theta},\dot{z}$ مجموعه کامل زیر از معادلات مشخصه را بدست می‌آوریم.

$$\xi=\xi(s),\quad \eta^{0}_{,s}=\eta^{0}_{,zr}=\eta^{0}_{,\theta r}=\eta^{0}_{,z\theta}=\eta^{1}_{,s}=0,\quad \frac{a}{2r}\eta^{1}_{,t}+\eta^{0}_{,tt}-\frac{a}{2\alpha}(\frac{r}{\alpha})^{a-1}\eta^{0}_{,r}=0,$$
$$\frac{a}{2r}\eta^{0}_{,r}+\eta^{0}_{,rr}=0,\quad \eta^{0}_{,zz}+\frac{a}{2\alpha}(\frac{r}{\alpha})^{a-1}\eta^{0}_{,r}=0,\quad \eta^{0}_{,\theta\theta}+\frac{a}{2\alpha}(\frac{r}{\alpha})^{a-1}\eta^{0}_{,r}=0,$$
$$\frac{a}{2r}\eta^{1}_{,\theta}+2\eta^{0}_{,t\theta}=0,\quad \frac{a}{2r}\eta^{1}_{,z}+2\eta^{0}_{,zt}=0,\quad \frac{a}{2r}\eta^{1}_{,r}+2\eta^{0}_{,tr}=0.$$

$$\eta^{2}_{,s}=\eta^{2}_{,zr}=\eta^{2}_{,tr}=\eta^{2}_{,zt}=0,\quad \frac{a}{2r}\eta^{1}_{,\theta}+\eta^{2}_{,\theta\theta}-\frac{a}{2\alpha}(\frac{r}{\alpha})^{a-1}\eta^{2}_{,r}=0,$$
$$\frac{a}{2r}\eta^{2}_{,r}+\eta^{2}_{,rr}=0,\quad \eta^{2}_{,zz}+\frac{a}{2\alpha}(\frac{r}{\alpha})^{a-1}\eta^{2}_{,r}=0,\quad \eta^{2}_{,tt}+\frac{a}{2\alpha}(\frac{r}{\alpha})^{a-1}\eta^{2}_{,r}=0,$$
$$\eta^{3}_{,s}=\eta^{3}_{,tr}=\eta^{3}_{,\theta r}=\eta^{3}_{,t\theta}=0,\quad \frac{a}{2r}\eta^{1}_{,z}+\eta^{3}_{,zz}-\frac{a}{2\alpha}(\frac{r}{\alpha})^{a-1}\eta^{3}_{,r}=0,$$
$$\frac{a}{2r}\eta^{3}_{,r}+\eta^{3}_{,rr}=0,\quad \eta^{3}_{,tt}+\frac{a}{2\alpha}(\frac{r}{\alpha})^{a-1}\eta^{3}_{,r}=0,\quad \eta^{3}_{,\theta\theta}+\frac{a}{2\alpha}(\frac{r}{\alpha})^{a-1}\eta^{3}_{,r}=0,$$

با حل این معادلات مشخصه قضیه زیر بدست می‌آید.

قضیه ۱.۲. *جبر لی $\mathfrak{g}$ تقارن‌های نقطه‌ای لی وابسته به متر (۲.۲) دارای پایه ی ۸-بعدی زیر است*

$$\begin{aligned} &X_۱ = \frac{\partial}{\partial s}, \quad X_۲ = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad X_۳ = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_۴ = z\frac{\partial}{\partial \theta} - \theta\frac{\partial}{\partial z}, \\ &X_۵ = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_۶ = \theta\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial \theta}, \quad X_۷ = z\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial z}, \\ &X_۸ = s\frac{\partial}{\partial s} + \frac{(۲-a)t}{۴}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{r}{۲}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{(۲-a)\theta}{۴}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{(۲-a)z}{۴}\frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \tag{۶.۲}$$

که جابجاگرهای مخالف صفر به‌صورت زیر هستند.

$$\begin{aligned} &[X_۱, X_۸] = X_۱, \quad [X_۲, X_۴] = X_۳, \quad [X_۲, X_۸] = \frac{۲-a}{۴}X_۲, \\ &[X_۳, X_۸] = \frac{۲-a}{۴}X_۳, \quad [X_۳, X_۴] = X_۲, \quad [X_۳, X_۷] = X_۵, \quad [X_۵, X_۶] = X_۲, \\ &[X_۴, X_۶] = X_۷, \quad [X_۷, X_۴] = X_۶, \quad [X_۵, X_۷] = X_۳, \quad [X_۷, X_۶] = X_۴. \end{aligned}$$

با توجه به [۱] می‌توان به راحتی مشاهده کرد که همه تقارن‌های بدست آمده، نوتر هستند. یکی از اصولی‌ترین روش‌ها برای بدست آوردن قوانین بقاء دستگاه‌های معادلات اویلر-لاگرانژی که تقارن‌های نوتر آن‌ها بدست آمده است، از طریق قضیه نوتر می‌باشد. بنابر روش نوتر برای دستگاه معادلات اویلر-لاگرانژ، قوانین بقاء از تقارن‌های تغییراتی یعنی آن دسته از تقارن‌هایی که انتگرال‌کنش را حفظ می‌کنند، حاصل می‌شوند.

تعریف ۲.۲. *فرض کنید*

$$E^{\beta}\left(x, u, u_۱, \ldots, u_r\right) = ۰, \quad \beta = ۱, \ldots, m, \tag{۷.۲}$$

یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه r-ام با n متغیر مستقل و m متغیر وابسته باشد. یک قانون بقاء برای دستگاه (۷.۲)، معادله $D_i\phi^i = ۰$ است که روی تمام جواب‌های دستگاه (۷.۲) برقرار می‌باشد. در اینجا عملگر دیفرانسیلی تام به‌صورت زیر می‌باشد.

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^{\alpha}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} + u_{ij}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial u_j^{\alpha}} + \cdots, \qquad i = ۱, \ldots, n,$$

nتایی $\phi = (\phi_۱, \ldots, \phi_n)$ انتگرال اولیه (۷.۲) نامیده می‌شود.

قضیه زیر اهمیت تقارن‌های نوتر را نشان می‌دهد. برای اثبات این قضیه به مرجع [۵] مراجعه کنید.

قضیه ۳.۲. *اگر X یک تقارن نوتر متناظر با لاگرانژین $L(s, x^{\mu}, \dot{x}^{\mu})$ باشد، آنگاه*

$$\phi = \frac{\partial L}{\partial(\dot{x}^i)}(\xi\dot{x}^i - \eta^i) - L\xi + A \tag{۸.۲}$$

یک انتگرال اولیه متناظر با X است.

با توجه به اینکه لاگرانژین متر (۲.۲) برابر است با $L = e^{(\frac{r}{\alpha})^a}\dot{t}^۲ - \dot{r}^۲ - e^{(\frac{r}{\alpha})^a}\dot{\theta}^۲ - e^{(\frac{r}{\alpha})^a}\dot{z}^۲$ انتگرال‌های اولیه متناظر با تقارن‌های $X_۱, \ldots, X_۸$ در جدول زیر قابل مشاهده است.

symmetry	First integrals
X_1	$e^{(\frac{r}{\alpha})^a}\dot{t}^2-\dot{r}^2-e^{(\frac{r}{\alpha})^a}\dot{\theta}^2-e^{(\frac{r}{\alpha})^a}\dot{z}^2$
X_2	$2e^{(\frac{r}{\alpha})^a}\dot{\theta}$
X_3	$2e^{(\frac{r}{\alpha})^a}\dot{z}$
X_4	$(\frac{r}{\alpha})^a(\theta\dot{z}-z\dot{\theta})$
X_5	$(\frac{r}{\alpha})^a\dot{t}$
X_6	$2(\frac{r}{\alpha})^a(\theta\dot{t}+\dot{\theta}t)$
X_7	$2(\frac{r}{\alpha})^a(z\dot{t}+\dot{z}t)$
X_8	$2\Big(\frac{2-a}{2}\Big(\Big(\frac{r}{\alpha}\Big)^a t\dot{t}-\Big(\frac{r}{\alpha}\Big)^a\theta\dot{\theta}\Big(\frac{r}{\alpha}\Big)^a z\dot{z}\Big)-2s\Big(\Big(\frac{r}{\alpha}\Big)^a\dot{t}^2-\Big(\frac{r}{\alpha}\Big)^a\dot{\theta}^2- -\Big(\frac{r}{\alpha}\Big)^a\dot{z}^2\Big)-r\dot{r}+2s\dot{r}^2+sL$

جدول ۱: انتگرال‌های اولیه متناظر با تقارن‌های $X_1, \ldots, X_8$

مراجع

[1] F. Ali and T. Froze. Complete Classification of Cylindrically Symmetric Static Space-time and the Corresponding Cconservation Laws Mathematics, 2016,4,50.

[2] G. Bluman, A. F. Cheviakov, Anco S., Application of symmetry methods to partial differential equations, Springer, 2010.

[3] G. Hall, , Symmetries and curvature structure in general relativity (World Scientific Lecture Notes in Physics), Singapore: World Scientific Pub. Co, 2004.

[4] M. Nadjafikhah , F. Ahangari , Symmetry Analysis and Conservation Laws of the Geodesic Equations for the Reissner-Nordstr¨om de Sitter Black Hole with a Global Monopole, Comm Nonlinear Sci Numer Simulat, **17** (2012), 2350-2361.

[5] L. V. Ovsiannikov, Group Analysis of Differential Equations, Academic Press, New York, 1982.

[6] H. Stephani, Differential equations: Their solutions using symmetry, Cambridge University Press, New York, 1989.

دانشگاه تبریز، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

آدرس پست الکترونیکی: `pouri@tabrizu.ac.ir`

دانشگاه تبریز، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

آدرس پست الکترونیکی: `jameie99@ms.tabrizu.ac.ir`

تعمیمی بر فضاهای توپولوژیک فشرده

فاطمه حیدری

چکیده. دو مفهوم فشردگی و مجموعه‌های باز از اهمیت خاصی در فضاهای توپولوژیک دارند. هدف این مقاله بیان نتایج به‌دست آمده از فضایی که از تعمیم این دو مفهوم بیان می‌شود.
کلمات کلیدی: شبه H-بسته، درون شبه H-بسته، بستار شبه H-بسته.

۱. مقدمه

محققین بسیاری به واکاوی مشخصات فضاهایی چون X، به‌طوری که اگرفضای هاسدورف X در فضای هاسدورف Y نشانده شود، آنگاه تصویر X زیرفضای بسته Y است، پرداختند. این موضوع برای اولین بار در سال ۱۹۲۴ مطرح شد و فضاهای هاسدورفی را که تصویر همسان‌ریختی آنها به هر فضای هاسدورف به‌عنوان زیرفضا، بسته باشند را **H-بسته** نامگذاری کردند. در ادامه در [۳] نشان داده شد که ویژگی H-بسته در فضای هاسدورف معادل است با اینکه

$H(i)$: هرپایه فیلتر بازی دارای نقطه انباشتگی است.

و ویژگی هاسدورف مینیمال در فضای هاسدورف معادل است با اینکه

$H(ii)$: هر پایه فیلتر باز به نقطه انباشتگی منحصربه‌فردی همگراست.

لازم به ذکر است که با ثابت کردن این قضیه که فضای هاسدورف، H-بسته است اگر وتنها اگر هر پوشش باز فضا، دارای زیرپوشش متناهی است که اجتماع بستار اعضای آن، فضا را می‌پوشاند، راه را برای شناخت فضای جدید هموار نمود، به‌طوری که در ادامه ویژگی‌های فضای $H(i)$ به‌طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفت[۸] و با حذف شرط هاسدورف به کلاس جدیدی از فضاهای توپولوژیک رسیدند که با $H(i)$ معادل است. چنین فضاهایی را شبه H-بسته نامیدند.

۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۲. *فضای توپولوژیک X، شبه H- بسته است (به اختصار QHC) هرگاه به‌ازای هر پوشش باز $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ برای X از عناصر τ، زیرمجموعه‌ی متناهی $I_\circ$ از I موجود باشد به‌طوری‌که $X \subseteq \bigcup_{\alpha\in I_\circ} cl_\tau(U_\alpha)$.*

در واقع تعریف فضای QHC، یکی از شرایط معادل خاصیت H -بسته، بدون فرض هاسدورف بودن فضاست و در فضای هاسدورف دو مفهوم H -بسته و QHC بر هم منطبق خواهند بود.

تعریف ۲.۲. *زیرمجموعه‌ی A از فضای (X,τ) را QHC نامند، هرگاه به‌ازای هر پوشش باز $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ برای مجموعه A از عناصر τ زیرمجموعه‌ی متناهی $I_\circ$ از I موجود باشد به‌طوری‌که $A \subseteq \bigcup_{\alpha\in I_\circ} cl_\tau(U_\alpha)$.*

اگر (A,τ_A) فضایی QHC باشد، گوییم A زیرفضای QHC در (X,τ) است، توجه می‌کنیم که هر زیرفضای QHC از فضای توپولوژیک، زیرمجموعه QHC است. اما عکس این مطلب برقرار نیست (برای مثال به[۸] رجوع شود). همچنین از تعریف برمی‌آید که هرفضای فشرده، QHC است، اما در[۸] با ذکر مثالی بیان شده است که عکس مطلب برقرار نیست.

برای شناخت بهتر فضای QHC خوب است چند قضیه مهم را از نظر بگذرانیم.

رده بندی موضوعی۲۰۱۰: ۵۴D۲۰،۵۴D۲۵.
سخنران: فاطمه حیدری .

قضیه ۳.۲. *الف) بستار هر زیرمجموعه‌ی QHC، QHC است.*
ب) اجتماع تعداد متناهی زیرمجموعه QHC از یک فضا QHC است.
پ) خاصیت QHC تحت نگاشت پیوسته حفظ می شود.
ت) خاصیت QHC انقباضی است. (خاصیت توپولوژیکی P را انقباضی گوییم، هرگاه $\tau \subset \tau^*$ و اگر τ^* خاصیت P را داشته باشد، آنگاه τ نیز این خاصیت را شامل شود.)

اثبات. الف) فرض کنیم A زیرفضای QHC از (X,τ) و $\{U_i \cap cl_\tau(A)\}_{i\in I}$ پوششی باز برای $cl_\tau(A)$ در τ_A باشد. بنابر فرض زیرمجموعه متناهی $I_\circ \subset I$ وجود دارد که

$$A \subseteq \bigcup_{I_\circ \in I} cl_{\tau_A}(U_i \cap A) \Rightarrow A \subseteq \bigcup_{I_\circ \in I} cl_\tau(U_i \cap A).$$

بنابراین $cl_\tau(A) \subseteq \bigcup_{I_\circ\in I} cl_\tau(U_i \cap A)$ و لذا $cl_\tau(A) \subseteq \bigcup_{I_\circ\in I} cl_\tau(U_i \cap cl_\tau(A))$ در نتیجه $cl_\tau(A) \subseteq \bigcup_{I_\circ\in I} cl_{\tau_A}(U_i \cap cl_\tau(A))$، یعنی $cl_\tau(A)$ زیرفضای QHC است.

ب) فرض کنیم (X,τ) فضای توپولوژیک و $A_i = X$ که $i = ۱,\ldots,n$ زیرفضاهای QHC باشند. فرض کنیم $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ پوششی برای $\bigcup_{i=۱}^{n} A_i$ باشد،در این صورت $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ نیز پوششی برای هر A_i، $i = ۱,\ldots,n$ است. پس زیرمجموعه‌های متناهی $J_i \subseteq J$، $i = ۱,\ldots,n$ وجود دارند که $A_i \subseteq \bigcup_{i\in J_i} cl_{\tau_{A_i}}(U_i \cap A_i)$، بنابراین

$$A_i \subseteq \bigcup_{i\in \cup J_i} cl_{\tau_{\cup_{i=۱}^n A_i}}(U_i \cap A_i) \Rightarrow \bigcup_{i=۱}^{n} A_i \subseteq \bigcup_{i\in \cup J_i} cl_{\tau_{\cup_{i=۱}^n A_i}}(U_i \cap A_i).$$

پ) فرض کنیم $f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau')$ تابعی پیوسته، S زیرمجموعه‌ی QHC از (X,τ) باشد و $\{U_i\}_{i\in I}$ پوششی باز برای $f(s)$ در τ' باشد. در این صورت $\{f^{-۱}(U_i)\}_{i\in I}$ پوششی باز برای S و بنابر فرض زیرمجموعه‌ی متناهی $I_\circ \subset I$ وجود دارد که

$$S \subseteq \bigcup_{i\in I_\circ} cl_\tau(f^{-۱}(U_i)) \Rightarrow f(S) \subseteq \bigcup_{i\in I_\circ} f(cl_{\tau'}((f^{-۱}(U_i))) \subseteq \bigcup_{i\in I_\circ} cl_{\tau'}(U_i).$$

ت) فرض کنیم $\tau \subseteq \tau^*$ توپولوژی‌هایی بر X باشند که (X,τ^*)، QHC است. اگر $\mathcal{U} = \{V_i\}_{i\in I}$ پوششی باز برای X در τ باشد، آن‌گاه $\mathcal{U}$ یک پوشش باز برای X در τ^* است و بنابه خاصیت QHC، $V_{i_۱},\ldots,V_{i_n}$ از $\mathcal{U}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $X = \bigcup_{j=۱}^{n} cl_{\tau^*}(V_{i_j})$. اما چون به ازای هر $۱ \le j \le n$ داریم $cl_{\tau^*}(V_{i_j}) \subseteq cl_\tau(V_{i_j})$، پس $X = \bigcup_{j=۱}^{n} cl_{\tau^*}(V_{i_j}) \subseteq \bigcup_{j=۱}^{n} cl_\tau(V_{i_j})$ یعنی (X,τ) نیز خاصیت QHC دارد. $\square$

تعریف ۴.۲. *درخصوص زیرمجموعه‌های QHC، دو مفهوم **درون شبه H- بسته** و **بستار شبه H- بسته** (به‌ترتیب به اختصار با $IQHC$ و $CQHC$ نشان می‌دهیم) در[۴] و[۵] عنوان شده است. A را زیرمجموعه **درون شبه H- بسته** فضای (X,τ) گوییم، هرگاه به ازای هر پوشش باز $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ برای مجموعه A از عناصر τ زیرمجموعه‌ی متناهی $I_\circ$ از I موجود باشد به‌طوری‌که $int_\tau(A) \subseteq \bigcup_{\alpha\in I_\circ} cl_\tau(U_\alpha)$ و همچنین A را زیرمجموعه **بستار شبه H- بسته** فضای (X,τ) گوییم، هرگاه به ازای هر پوشش باز $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ برای مجموعه $cl_\tau(A)$ از عناصر τ_A، زیرمجموعه‌ی متناهی $I_\circ$ از I موجود باشد به‌طوری‌که $A \subseteq \bigcup_{\alpha\in I_\circ} cl_{\tau_A}(U_\alpha \cap A)$.*

تذکر ۵.۲. *مثال‌های (۳) و (۴) از [۵]، نشان می‌دهند که دو مفهوم $IQHC$ و $CQHC$ جدا از هم هستند.*

لم ۶.۲. *در فضای توپولوژیک (X,τ) احکام زیر برقرارند.*
الف) هر زیرمجموعه‌ی QHC (زیرفضای) از فضای X، $IQHC$ است.
ب) اگر زیرمجموعه‌ی A در فضای $CQHC$، X چگال باشد، آنگاه A، $CQHC$ است.
پ) هر زیرفضای (زیرمجموعه) QHC از فضا، یک زیرمجموعه $IQHC$ است.
ت) هر زیرفضای QHC از فضا، $CQHC$ است.

مثال ۷.۲. *فرض کنیم $X=[0,1]$ فضایی با توپولوژی معمولی باشد، دراین‌صورت X فضایی فشرده و درنتیجه QHC است، اما زیرمجموعه $A=[\frac{1}{2},1]\bigcup\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\}$، QHC نیست، پس زیرفضای QHC نیز نخواهد بود. از طرفی $[\frac{1}{2},1]$، QHC است و هر پوشش باز از A، $[\frac{1}{2},1]$ را می‌پوشاند و $int_\tau(A)=(\frac{1}{2},1]$. بنابراین A زیرمجموعه $IQHC$ است که زیرفضای QHC نیست.*

۳. نتایج

مفهوم باز بودن نیز در سال‌های اخیر، دستخوش گسترش و تعمیم‌هایی شده است. باید دقت نمود از آن‌جا که مجموعه‌های باز، هسته و مرکز ثقل توپولوژی می‌باشند، تعمیم آن بر تمام بخش‌های این علم اثر می‌گذارد. در واقع با تعمیم مجموعه‌های باز، خواسته یا ناخواسته، موضوعاتی چون مجموعه‌های بسته، پیوستگی، فشردگی و ... نیز اثر می‌پذیرند، به‌طور مثال سوالی که در خصوص فضای QHC مطرح شد این بوده است که آیا می‌توان به‌جای پوشش باز در تعریف فضای QHC، پوششی برحسب تعمیم مجموعه‌های باز انتخاب نمود؟ با ذکر قضیه زیر جواب مثبت به سوال دادیم.

تعریف ۱.۳. *فرض کنیم (X,τ) فضایی توپولوژیک و $A\subseteq X$. زیرمجموعه‌ی A را* ***پیش باز*** *(متناظراً* ***باز منظم****) گوییم، هرگاه $A\subseteq int_\tau(cl_\tau(A))$ (متناظراً $A=int_\tau(cl_\tau(A))$). برای خانواده‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های پیش باز (متناظراً باز منظم) فضای X، نماد $PO(X,\tau)$ ($RO(X,\tau)$) به کار می‌بریم. واضح است بنا به تعریف هر مجموعه بازی، پیش باز هست اما عکس آن الزاما برقرار نیست.*

قضیه ۲.۳. *فضای (X,τ)، QHC است اگر و تنها اگر برای هر پوشش $\{P_i\}_{i\in I}\in PO(X,\tau)$ برای X زیرمجموعه متناهی $I_\circ\subset I$ وجود دارد که $X=\bigcup_{I_\circ\in I} cl_\tau(P_i)$.*

اثبات. فرض کنیم (X,τ) فضایی QHC و $\{P_i\}_{i\in I}$ پوششی از پیش بازها برای X باشد. چون به ازای هر $i\in I$، $P_i\subset int_\tau(cl_\tau(P_i))\subset cl_\tau(P_i)$ پس خانواده‌ی $\{int_\tau(cl_\tau(P_i))\}_{i\in I}$ پوششی باز برای X است و بنابه فرض زیر مجموعه متناهی $I_\circ\subset I$ وجود دارد که

$$X=\bigcup_{I_\circ\in I} cl_\tau(int_\tau(cl_\tau(P_i)))=\bigcup_{I_\circ\in I} cl_\tau(P_i).$$

برعکس، چون هر بازی، پیش باز است، نتیجه به راحتی حاصل می‌شود. □

نتیجه ۳.۳. *فضای (X,τ)، QHC است اگر و تنها اگر برای هر پوشش $\{U_i\}_{i\in I}\in RO(X,\tau)$ برای X زیرمجموعه متناهی $I_\circ\subset I$ وجود دارد که $X=\bigcup_{I_\circ\in I} cl_\tau(U_i)$.*

همانطور که در تعریف ۱.۲ اشاره شد، هر زیرفضای QHC از فضای توپولوژیک، زیرمجموعه QHC است. حال با استفاده از مجموعه‌های پیش باز نشان می‌دهیم عکس مطلب برقرار خواهد بود.

قضیه ۴.۳. *فرض کنیم (X,τ) فضای توپولوژیک و $A\in PO(X,\tau)$. در این صورت A زیرمجموعه‌ی QHC از (X,τ) است اگر و تنها اگر A زیرفضای QHC از (X,τ) باشد.*

اثبات. فرض کنیم A زیرمجموعه‌ی QHC از (X,τ) باشد و $\{V_i\}_{i\in I}$ پوششی از پیش بازها برای زیرفضای A باشد. بنا به لم ۱ از [۷]، مجموعه پیش باز U_i در X برای هر $i\in I$ وجود دارد که $V_i=U_i\cap A$،

لذا $\bigcup_{i\in I} U_i \subseteq A$. چون A زیرمجموعه QHC است، پس زیرمجموعه متناهی $I_\circ \subset I$ وجود دارد که $\bigcup_{i\in I} U_i \subseteq A$ و بنابراین $A \subseteq \bigcup_{i\in I}(U_i \cap A) \subset \bigcup_{i\in I} V_i$.

برعکس، با استفاده از تعریف اثبات واضح است. □

تذکر ۵.۳. *در قضیه ۲.۳ اثبات کردیم که بستار هر زیرمجموعه‌ی QHC، QHC است. اما توجه می‌کنیم که این مطلب برای زیرمجموعه‌های $IQHC$ برقرار نیست. برای مثال نقض می‌توان مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی و زیرمجموعه اعداد گویا $\mathbb{Q}$ در نظر گرفت. از آنجا که $int(\mathbb{Q}) = \emptyset$، لذا $\mathbb{Q}$، $IQHC$ است، اما داریم $cl(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. در ادامه نشان می‌دهیم برای زیرمجموعه‌های $IQCH$ این خاصیت برقرار است.*

قضیه ۶.۳. *بستار هر زیرفضای $CQHC$، زیرفضای $CQHC$ است.*

اثبات. فرض کنیم زیرمجموعه‌ی A از فضای (X,τ)، $CQHC$ و $\{U_i\}_{i\in I}$ پوششی باز از τ برای $cl_\tau(A)$ باشد. بنابه فرض، زیرمجموعه‌ی متناهی $I_\circ \subset I$ وجود دارد که

$$A \subset \bigcup_{i\in I_\circ} cl_{\tau_A}(U_i \cap A) = \bigcup_{i\in I_\circ} cl_\tau(U_i \cap A) \cap A.$$

چون $I_\circ$ متناهی است، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} cl_\tau(A) &\subseteq cl_\tau\left(\bigcup_{i\in I_\circ} cl_\tau(U_i\cap A)\cap A\right) \\ &= \bigcup_{i\in I_\circ} cl_\tau(cl_\tau(U_i\cap A)\cap A) \\ &\subseteq \bigcup_{i\in I_\circ} cl_\tau(U_i\cap A)\cap cl_\tau(A) \\ &\subset \bigcup_{i\in I_\circ} cl_\tau(U_i\cap cl_\tau(A))\cap cl_\tau(A) \\ &= \bigcup_{i\in I_\circ} cl_{cl_\tau(A)}(U_i\cap cl_\tau(A)). \end{aligned}$$

□

مراجع

[1] P. Alexandroff, P. Urysohn, Zurtheorio der topologische Raume, Math. Ann, **92**(1924), 258-266.
[2] D. Andrijevic, Semi-preopen sets. Mat. Vesnik, **38** (1986), 24–32.
[3] Bourbaki, Espace minimaux et espace complètement sépare, C. R. Acad. Sci. Paris, **212** (1941), 215-218.
[4] D. E. Cameron, Maximal QHC-space, Rocky Mountain J. Math. **7** (1977), 313-322.
[5] D. E. Cameron, Some maximal topologies which are QHC, Proc. Amer. Math. Soc, **75** (1975), 149-156.
[6] Z. Duszynski, On quasi H-closed subspaces, Institute of Mathematics,**59** (2010), 187-197.
[7] Z. Duszynski, On s-closedness and S-closedness in topological spaces, Institute of Mathematics, **62** 3, (2010), 199-214.
[8] J. Porter, J. Thomas, On H-closed and minimal Hausdorff space, Transactions of the American Mathematical Society, **138** (1969), 159-170.

دانشگاه کاشان، دانشکده علوم ریاضی.
آدرس پست الکترونیکی: `fatemeheidari50@yahoo.com`

تانسور انحنای همدیس وابسته به التصاق ربع متقارن غیرمتریک

محمدباقر کاظمی و فاطمه راعی

چکیده. در مقاله پیش‌رو، ما دسته‌ای از منیفلدهای شبه‌ریمانی که منیفلدهای پارا-سایا نامیده می‌شوند، را بررسی کرده‌ایم. بر روی این منیفلدها التصاق ربع متقارن که در آن تانسور تاب برحسب ۱-فرمی‌ها نوشته می‌شود در نظر گرفته و حالت غیرمتریک آن را مطالعه نموده‌ایم. انحنای همدیس وابسته به این التصاق را تعریف کرده و خواص آن را نشان داده‌ایم. در پایان، مثالی از منیفلدهای پارا-سایا با التصاق ربع متقارن نیز ارائه کرده‌ایم.

کلمات کلیدی: منیفلد لورنتزی، التصاق ربع متقارن، انحنای همدیس.

۱. مقدمه

التصاق لوی-چویتا دوخاصیت اصلی و مهم یعنی متقارن (بدون تاب) بودن و سازگاری با متر را دارد که این التصاق را بسیار خاص و منحصربه فرد کرده است. تعمیم‌های مختلفی از این التصاق در حالت‌های متفاوت بیان شده است که از آن می‌توان به التصاق‌های آماری، نیم-متقارن، ربع متقارن، غیرمتریک و... اشاره کرد [۱، ۲، ۴].

از طرف دیگر، در بین ساختارهای ریمانی و شبه‌ریمانی مختلفی که بر روی منیفلدها با بعد فرد بررسی شده است، ساختار تقریباً سایا و تقریباً پارا-سایا دو دسته معروف وپرکاربرد هستند [۵، ۶]. در این مقاله، ما التصاق‌های غیرمتقارن متریک را بر روی منیفلدهای لورنتزی همراه با ساختار تقریباً پارا-سایا را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

تعریف ۱.۱ ([۳، ۵]). *یک منیفلد شبه‌ریمانی n- بعدی، پارا-سایای لورنتزی نامیده می‌شود، هرگاه مجهز به (۱، ۱) میدان تانسوری ϕ ، میدان برداری ξ ، ۱-فرمی η و متریک لورنتزی g باشد، که در تساوی‌های زیر به‌ازای همه میدان‌های برداری X, Y صدق می‌کند.*

$$\eta(\xi) = -1,\ \phi^2(X) = X + \eta(X)\xi, \tag{۱.۱}$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y) \tag{۲.۱}$$

به علاوه اگر نسبت به التصاق لوی-چویتا در رابطه زیر صدق کند

$$(\nabla_X \phi)(Y) = g(X,Y)\xi + \eta(Y)X + 2\eta(X)\eta(Y), \tag{۳.۱}$$

این منیفلدها را LP -ساساکی می‌گوییم و می‌توان نشان داد که روابط زیر نیز در آنها برقرار است

$$\phi\xi = 0,\ \eta(\phi X) = 0,\ rank\phi = n-1. \tag{۴.۱}$$

همچنین می‌توان نشان داد بر روی این دسته از منیفلدها برای میدان‌های برداری X، Y و Z روابط زیر برقرار هستند [۵].

$$R(X,Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y, \tag{۵.۱}$$

$$S(X,\xi) = (n-1)\eta(X), \tag{۶.۱}$$

$$S(\phi X, \phi Y) = S(X,Y) + (n-1)\eta(X)\eta(Y), \tag{۷.۱}$$

که در اینجا R و S به ترتیب تانسورهای انحنا و ریچی روی منیفلد M هستند.

رده بندی موضوعی۲۰۱۰: ۵۳C۳۵. ۵۰C۱۰،

۲. تانسور انحنای همدیس وابسته به التصاق‌های ربع متقارن

تعریف ۱.۲. *بر روی منیفلد تقریبا پارا- سایای (M, g, ϕ, ξ, η)، التصاق $\bar{\nabla}$ را ربع متقارن گوییم هرگاه تانسور تاب وابسته به این التصاق در تساوی زیر صدق کند*

$$\bar{T}(X, Y) = \eta(Y)\phi X - \eta(X)\phi Y, \tag{۱.۲}$$

و اگر این التصاق با متر سازگار نباشد آن را غیرمتریک می‌نامیم.

اگر برای التصاق ریمانی ∇ برای هر میدان برداری X و Y قرار دهیم

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \eta(Y)\phi X, \tag{۲.۲}$$

در این‌صورت التصاق به‌دست آمده $\bar{\nabla}$ یک التصاق خطی روی M است. از آن‌جایی که تانسور تاب $\bar{T}$ وابسته به التصاق $\bar{\nabla}$ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\bar{T}(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X - [X, Y],$$

از (۲.۲) داریم

$$\bar{T}(X, Y) = \eta(Y)\phi X - \eta(X)\phi Y. \tag{۳.۲}$$

همچنین با محاسبه مستقیم می‌توان نشان داد که متر لورنتزی این ساختار در رابطه زیر صدق می‌کند

$$(\bar{\nabla}_X g)(Y, Z) = -\eta(Y)\Phi(X, Z) - \eta(Z)\Phi(X, Y), \tag{۴.۲}$$

که در اینجا $\Phi(X, Y) = g(\phi X, Y)$ است و این به آن معناست که التصاق معرفی شده، یک التصاق ربع متقارن غیرمتریک بر روی منیفلد M است.

به‌علاوه تانسور انحنای $\bar{R}$ وابسته به التصاق غیرمتریک ربع متقارن $\bar{\nabla}$ روی M با توجه به تعریف انحنای ریمانی به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\bar{R}(X, Y)Z = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X,Y]} Z. \tag{۵.۲}$$

و نیز تانسور ریچی حاصل از رد تانسور انحنای $\bar{R}$ را با نماد $\bar{S}$ و انحنای اسکالری حاصل از رد $\bar{S}$ را با $\bar{r}$ معین خواهیم کرد. همچنین قرار می‌دهیم $\bar{K}(X, Y, Z, U) = g(\bar{R}(X, Y, Z)U))$.

تعریف ۲.۲. *فرض کنید M یک منیفلد $LP-$ساساکی $n-$ بعدی است. تانسور انحنای همدیس M نسبت به التصاق ربع متقارن غیرمتریک $\bar{\nabla}$ به شکل زیر است.*

$$\begin{aligned}\bar{C}(X, Y, Z, U) =& \bar{K}(X, Y, Z, U) - \frac{۱}{n-۲}\{g(Y, Z)\bar{S}(X, U) - g(X, Z)\bar{S}(Y, U)\\ &+ \bar{S}(Y, Z)g(X, U) - \bar{S}(X, Z)g(Y, U)\} + \frac{\bar{r}}{(n-۱)(n-۲)}\\ &\{g(Y, Z)g(X, U) - g(X, Z)g(Y, U)\}.\end{aligned} \tag{۶.۲}$$

قضیه ۳.۲. *فرض کنید M یک منیفلد $LP-$ساساکی $n-$ بعدی با التصاق ربع متقارن غیرمتریک $\bar{\nabla}$ است. در این‌صورت برای هر میدان برداری $X, Y, Z, U \in \Gamma(TM)$ داریم*

$$\begin{aligned}\bar{C}(X, Y, Z, U) =& C(X, Y, Z, U) - \frac{۱}{n-۲}\{g(X, Z)[-۲g(Y, U) - n\eta(Y)\eta(U)]\\ &+ g(Y, Z)[۲g(X, U) + n\eta(X)\eta(U)] + g(X, U)[n\eta(Y)\eta(Z)]\\ &+ g(Y, U)[-n\eta(X)\eta(Z)] + \Phi(X, Z)\Phi(Y, U) - \Phi(Y, Z)\Phi(X, U)\\ &+ \eta(Z)\{\eta(Y)g(X, U) - \eta(X)g(Y, U)\}.\end{aligned} \tag{۷.۲}$$

که در اینجا C تانسور انحنای همدیس وابسته به التصاق لوی- چویتاست.

تعریف ۴.۲. *تانسور ریچی $\bar{S}$ را بر روی منیفلد $LP-$ساساکی (M, g, ϕ, ξ, η)، η-انیشتینی گوییم هرگاه داشته باشیم*

$$\bar{S}(X, Y) = ag(X, Y) + b\eta(X)\eta(Y).$$

در تعریف فوق a, b توابع اسکالری غیرصفر هستند. در صورتی‌که $b = 0$ منیفلد انیشتینی نامیده می‌شود.

قضیه ۵.۲. *اگر M منیفلد LP-ساساکی و $\bar{C}$ نسبت به التصاق ربع متقارن غیرمتریک تخت باشد، آنگاه $\bar{S}$ نسبت به التصاق ربع متقارن غیرمتریک، η-انیشتینی است.*

مثال ۶.۲. *فرض کنید* $\bar{M} = \left\{(x,y,z,u,v) \in \mathbb{R}^5,\ (x,y,z,u,v) \neq (0,0,0,0,0)\right\}$ *منیفلد ۵-بعدی در نظر گرفته شود که در آن* (x,y,z,u,v) *مختصات استاندارد در* $\mathbb{R}^5$ *هستند. میدان‌های برداری*

$$e_1 = 2(-\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}),\ e_2 = 2\frac{\partial}{\partial y},\ e_3 = 2\frac{\partial}{\partial z},\ e_4 = 2(-\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial z}),\ e_5 = 2\frac{\partial}{\partial v}, \tag{8.2}$$

در هر نقطه از $\bar{M}$ مستقل خطی هستند.

فرض کنید g متریک تعریف شده به‌صورت $g(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \text{ وقتی‌که } \\ 0, & i \neq j \text{ وقتی‌که } \end{cases}$ *و به‌ازای هر* $Z \in \Gamma(T\bar{M})$ *،* ۱*-فرمی η به‌صورت* $\eta(Z) = g(Z, e_3)$ *باشد. در این‌صورت ϕ میدان تانسوری از نوع* $(1,1)$ *را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$\phi e_1 = e_2,\ \phi e_2 = -e_1,\ \phi e_3 = 0,\ \phi e_4 = e_5,\ \phi e_5 = -e_4. \tag{9.2}$$

ساختار حاصل پارا-سایای متریک است. حال فرض کنید $\bar{\nabla}$ التصاق لوی‌چویتا نسبت به متریک g باشد و داریم $[e_1, e_2] = -2e_3 = [e_4, e_5]$ *و مابقی مولفه‌ها صفر باشند.*
تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} &\bar{\nabla}_{e_1} e_2 = -e_3, \quad \bar{\nabla}_{e_1} e_3 = e_2, \quad \bar{\nabla}_{e_2} e_1 = -e_3, \quad \bar{\nabla}_{e_2} e_3 = -e_1, \quad \bar{\nabla}_{e_3} e_1 = e_2, \\ &\bar{\nabla}_{e_3} e_2 = -e_1, \quad \bar{\nabla}_{e_3} e_4 = e_5, \quad \bar{\nabla}_{e_3} e_5 = -e_4, \quad \bar{\nabla}_{e_4} e_3 = e_5, \quad \bar{\nabla}_{e_5} e_3 = -e_4. \end{aligned} \tag{10.2}$$

در این‌صورت با توجه به فرمول (۲.۲) التصاقی که به‌دست می‌آید التصاقی ربع متقارن است. بنابراین ساختار به‌دست آمده، یک منیفلد پارا-سایا با التصاق ربع متقارن است.

مراجع

[1] U. C. De, S. Uddin, Gauss and Ricci Equations in contact manifolds with aquarter-symmetric metric connection. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **38** (2015), 689–703.

[2] M. B. Kazemi, S. Slahvarzi, Curvatures of semi-symmetric metric connections on statistical manifolds, Commun. Korean Math. Soc. **36** (2021), 149-164.

[3] K. Matsumoto, On Lorentzian Paracontact manifolds, Bull. Yamagata Univ. Natur. Sci., **12** (1989), 151-156.

[4] A.K. Mondal, U.C. De, Some properties of a quarter-symmetric metric connection on a sasakian manifold, Bull. Math. anal. appl. **24** (2019), 99-108.

[5] R. Rosca, On Lorentzian P-Sasakian manifolds, Clssical Analysis, World Scientific Publ., Signapore, 1992.

[6] K. Yano, M. Kon, Structures on manifolds, Series in pure mathematics-volume 3, World scientific 1984.

گروه ریاضی، دانشگاه زنجان، صندوق پستی ۴۵۳۷۱-۳۸۷۹۱ زنجان، ایران.
آدرس پست الکترونیکی: `mbkazemi@znu.ac.ir`

گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۱۴۶۶۵-۸۸۹ تهران، ایران.
آدرس پست الکترونیکی: `f.raei@cfu.ac.ir`

روشی برای ترسیم دقیق ۲۰۴۰-ضلعی منتظم و به تبع آن ۱۷-ضلعی منتظم و چندضلعی‌های مضرب 3×17 و 5×17

غلامرضا سلطانی ابری

چکیده. در این مقاله با الهام از ترسیم ۱۷-ضلعی منتظم توسط پروفسور دیوید ایزنباد رئیس اسبق انجمن ریاضی آمریکا ولی با روشی متفاوت ابتدا کمان مقابل به یک ضلع ۳۴-ضلعی منتظم و سپس با بدست آوردن ثلث این کمان یک ضلع ۱۰۲-ضلعی و ۱۷-ضلعی منتظم را بدست آورده و با روشی که برای بدست آوردن زاویه‌های مضرب ۳ و ۲۱ درجه دارم، روش ترسیم ۲۰۴۰-ضلعی منتظم را تشریح نموده‌ایم.

کلمات کلیدی: ۲۰۴۰-ضلعی منتظم و به تبع آن ۱۷-ضلعی منتظم ، چندضلعی‌های مضرب 3×17 و 5×17، کارل فریدریش گاووس، پروفسور دیوید ایزنباد.

۱. مقدمه

یک هفده ضلعی منتظم دارای ضلع‌ها و زاویه‌های داخلی برابر است.
اندازه زاویه‌های داخلی هر رأس آن حدود $\widehat{158/8}$ بوده و مساحت آن با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$A = \frac{17}{4} a^2 \cot \frac{\pi}{17} \simeq 22/7355 a^2.$$

یک هفده ضلعی منتظم با استفاده از خط‌کش غیر مدرج و پرگار قابل ترسیم است. این موضوع در سال ۱۷۹۶ توسط کارل فریدریش گاوس ۱۹ ساله اثبات شد [۴].
این اثبات نخستین پیشرفت در ترسیم چندضلعی‌های منتظم پس از بیش از ۲۰۰۰ سال بود [۴].
اثبات گاوس بر اساس این حقیقت بود که اولاً قابل ترسیم بودن، معادل است با قابل بیان بودن تابع‌های مثلثاتی زاویه مشترک براساس عملگرهای حسابی و ریشه دوم، و دوم اینکه این کار قابل انجام است اگر توان‌های اول فرد n اعداد اول فرمای متفاوتی (به فرم $F_n = 2^{2^n} + 1$) باشند.
بنابراین ترسیم یک هفده ضلعی منتظم شامل یافتن کسینوس $(\frac{2\pi}{17})$ برحسب ریشه دوم است. گاوس در کتاب بررسی‌های حسابی (Arithmeticase Disquisitiones) خود این رابطه را به این‌صورت استخراج کرده است.

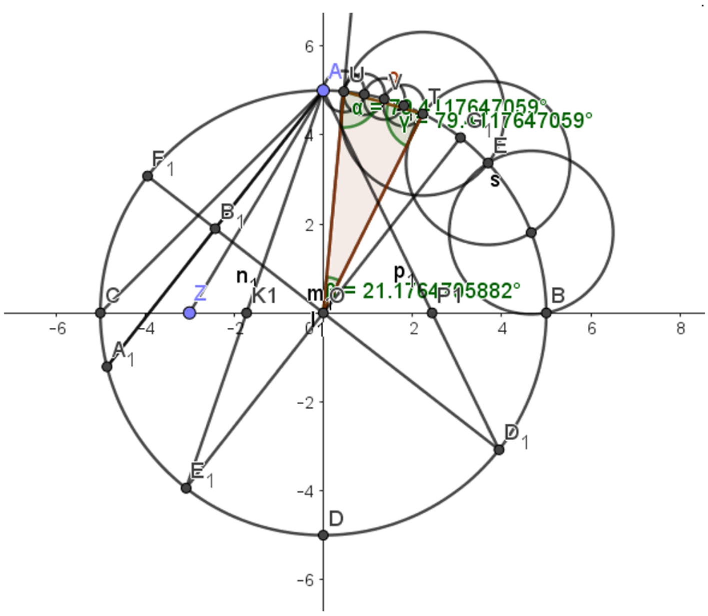
$$\begin{aligned} 16 \cos \frac{2\pi}{17} &= -1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &\quad + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}. \end{aligned}$$

ترسیم چند ضلعی‌های منتظم با 2^n ضلع توسط اقلیدس شناخته شده بود، ولی ترسیم براساس اعداد فرما (به جز ۳ و ۵) در ریاضیات باستان ناشناخته بود.
نخستین ترسیم صریح از هفده ضلعی منتظم در سال ۱۸۲۵ توسط یوهان ارشینگر انجام گرفت. براساس ترسیم یک هفده ضلعی منتظم می‌توان به راحتی n-ضلعی‌هایی با n به‌صورت حاصل‌ضرب 3×17 یا ۵ (و یا هر دو) و هر توان ۲ (مثلاً ۵۱-ضلعی، ۸۵-ضلعی یا ۲۵۵-ضلعی) ترسیم کرد.

رده بندی موضوعی۲۰۱۰: ۵۴C۳۰، ۵۴C۴۰، ۵۴C۰۵.
سخنران: غلامرضا سلطانی ابری .

Heptadecagon

شکل ۱:



محور اصلی واثبات مطلب

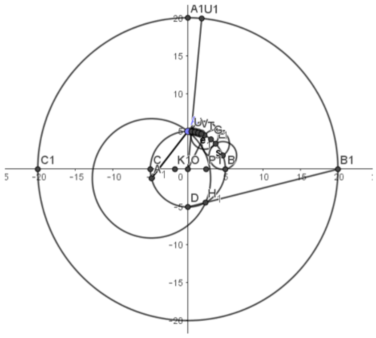
در شکل ۱ با روش ترسیم پروفسور ایزنباد زاویه مرکزی مقابل به یک ضلع ۱۷-ضلعی منتظم را روی کمان $\widehat{90}$ سمت راست بالای دایره بدست آورده‌ایم. برای آشنایی با روش ترسیم ایشان می‌توان به منبع [۳] و منبع [۱] مراجعه نمود. روش من برای ترسیم ۳۴-ضلعی و ۱۰۲ منتظم و به تبع آن ۱۷-ضلعی منتظم با توجه به شکل ۱ این است که روی شعاع افقی سمت چپ همان دایره نقطه‌ای مثل Z را انتخاب کرده‌ام که به اندازه سه پنجم شعاع دایره با مرکز دایره فاصله دارد. سپس وتر زاویه $\widehat{90}$ AC و پاره خط AZ را رسم و وتر AA_1 نیمساز $\widehat{CAZ}$ را بدست آورده و از مرکز دایره o عمودی بر نیمساز AA_1 وارد نموده‌ام که امتداد آن دایره را در نقطه‌ای مثل D_1 قطع کرده است. سپس عمودی بر OD_1 وارد نموده‌ام که دایره را در نقطه E_1 قطع کرده، وترهای AD_1 و AE_1 را نیز رسم نموده‌ام که در نقاط K_1 و P_1 قطر افقی را قطع کرده‌اند.

با توجه به شکل ۲ به مرکز A_1 و شعاع AA_1 دایره‌ای زده‌ام که در نقطه H_1 دایره O را قطع کرده است. پاره‌خط DH_1 را رسم و امتداد داده‌ام تا در نقطه B_1 امتداد شعاع افقی را قطع کند به مرکز O و شعاع OB_1 دایره‌ای زده‌ام که در نقطه C_1 قطر افقی را قطع کرده است.

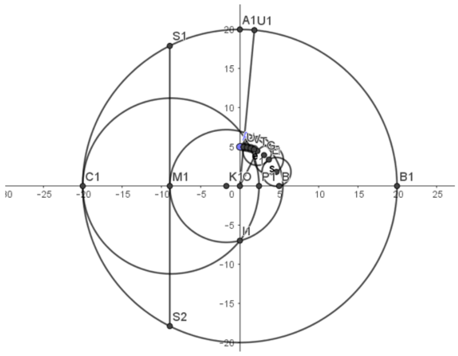
با توجه به شکل ۳ وسط نقاط C_1 و P_1 را بدست آورده و به آن مرکز دایره‌ای زده‌ام که از نقاط P_1 و C_1، گذشته و قطر عمودی دایره O را در دو نقطه از جمله نقطه I_1 قطع نموده و به مرکز K_1 و شعاع K_1I_1 دایره‌ای زده‌ام که قطر افقی دایره را در دو نقطه از جمله نقطه M_1 قطع نموده، از نقطه M_1 عمودی بر قطر افقی وارد شده که در نقاط S_1 و S_2 دایره بزرگ را قطع نموده‌اند.

در شکل ۴ به مرکز S_2 و شعاع S_2S_1 دایره‌ای زده شده است که دایره به مرکز O را در نقطه T و امتداد شعاع افقط را در نقطه G قطع کرده، که اگر کمان B_1T را دو برابر کنیم منطبق بر کمان B_1K می‌شود که در ترسیم پروفسور ایزنباد برابر با کمان یک ضلع هفده ضلعی منتظم است و این مطلب را تایید می‌کند نقطه B_2 که محل تلاقی وتر S_1G با دایره O است که داریم $3\widehat{B_1OB_2} = \widehat{TOB_1}$. بنابراین $6\widehat{B_1OB_2} = \widehat{B_1OK}$ (۲۱/۱۸ = ۳/۵۳ × ۶). در شکل ۵ با توجه به منبع [۲] به روش خودم زاویه ۲۱ درجه را ترسیم نموده‌ام

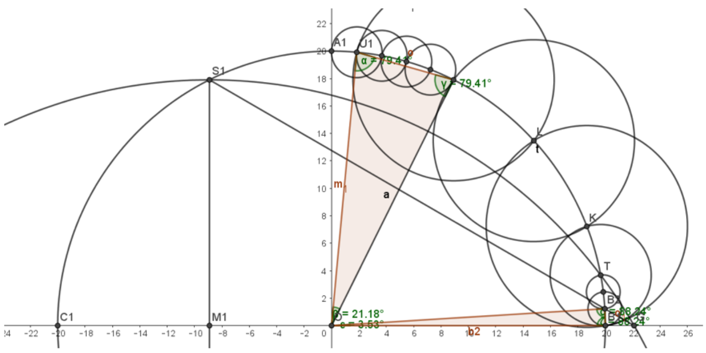
شکل ۲:



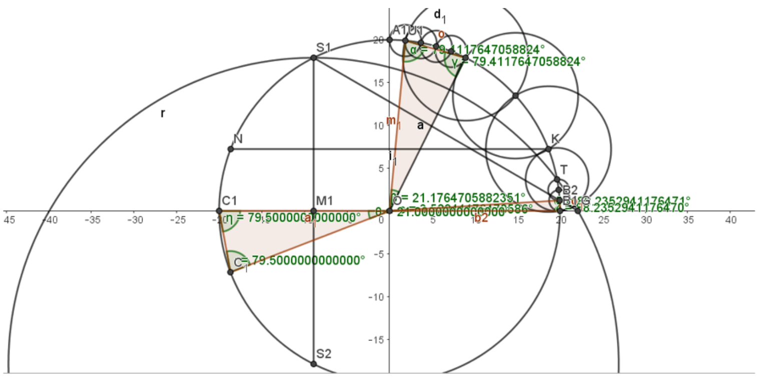
شکل ۳:



شکل ۴:



شکل ۵:



که اگر از زاویه مقابل به یک ضلع ۱۷-ضلعی منتظم کم شود زاویه باقیمانده مقابل به یک ضلع ۲۰۴۰-ضلعی منتظم می‌شود که هم مضربی از ۱۷ × ۳ است و هم مضربی از ۱۷ × ۵ و چون ۲۱ × ۱۷ می‌شود، $\widehat{۳۵۷}$ معلوم می‌شود، زاویه اعشاری هر ضلع را ۱۷ برابر کنیم، $\widehat{۳}$ می‌شود. در این حالت زاویه مرکزی هر ضلع ۱۷-ضلعی ۱۲۰ برابر اعشارش می‌شود و داریم ۲۰۴۰ = ۱۲۰ × ۱۷.

۲. نتیجه‌گیری

روش‌های دیگری نیز برای ترسیم ۱۷-ضلعی منتظم و چندضلعی‌های مضرب ۳ × ۱۷ و ۵ × ۱۷ داریم که با توجه به محدودیت صفحات مقله به همین روش برای اثبات عنوان در نظر گرفته شده برای مقاله اکتفا می‌کنیم.

سپاسگزاری

۱. سپاسگزاری و تقدیر و تشکر می‌کنم از چهره ماندگار و مروج ریاضی کشور استاد بزرگوار جناب پروفسور امید علی شهنی کرمزاده.
۲. سپاسگزاری و تقدیر و تشکر می‌کنم از چهره ماندگار و مروج ریاضی کشور استاد بزرگوار جناب پروفسور مگردیچ تومانیان.
۳. گرامی می‌دارم یاد و خاطره استاد بزرگوار شادروان جناب پروفسور علی رضا اشرفی را بخاطر حمایت و تشویق اینجانب به ادامه تحقیقات.

مراجع

[۱] غلامرضا سلطانی ابری، روشی برای اثبات امکان ترسیم دقیق ۱۷-ضلعی منتظم، پنجاه و یکمین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه کاشان.
[۲] غلامرضا سلطانی ابری، روشی برای ترسیم زاویه‌های $\widehat{۳۶}$ و $\widehat{۷۲}$، چهل و نهمین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه علم و صنعت.
[۳] هفده ضلعی شگفت‌انگیز WWW.aparat.com/V/JaJAIXf/
[4] Arthur Jones, Sidney A. Morris, Kenneth R. Pearson, Abstract Algebra and Famous Impossibilities, Springer, 1991.

پژوهشگر در حوزه هندسه مسطحه، گنبدکاووس، گلستان، ایران
آدرس پست الکترونیکی: gholamrezasoltaniabri@yahoo.com

ابررویه‌های L_k- بای‌هارمونیک در فضاهای لورنتس-مینکوفسکی ۳ یا ۴ بعدی

رحیم حسین اوغلی و اکرم محمدپوری

چکیده. در این مقاله نشان می‌دهیم که هر رویه L_k-بای‌هارمونیک در فضای لورنتس-مینکوفسکی $\mathbb{L}^3$، k-ماکسیمال است. همچنین اثبات می‌کنیم هر ابررویه L_k-بای‌هارمونیک در $\mathbb{L}^4$ با k-امین خمیدگی میانگین ثابت، k-ماکسیمال است. و با بدست آوردن این نتایج، جواب جزئی به حدس چن برای عملگر L_k می‌دهیم که بیان می‌کند هر L_k-بای‌هارمونیکی، L_k-ماکسیمالی را نتیجه می‌دهد.

کلمات کلیدی: ابررویه‌های L_k-بای هارمونیک، ابررویه‌های k-ماکسیمال، عملگر L_k، k-امین خمیدگی میانگین.

۱. مقدمه

مطالعه زیرخمینه‌های بای‌هارمونیک در اواسط دهه هشتاد توسط چن و همزمان با تحقیقات وی در راستای تئوری زیرخمینه‌های متناهی نوع آغاز شد. حدس معروفی از چن بیان می‌کند که زیر خمینه‌های بای‌هارمونیک اقلیدسی، مینیمال‌اند [۳]. حدس چن در سه دهه اخیر مورد توجه هندسه‌دانهای زیادی قرار گرفته و در برخی حالت‌های خاص حدس چن مورد بررسی قرار گرفته است، هرچند این حدس همچنان به عنوان یک مساله باز مطرح است. در حالت کلی حدس چن برای همه زیرخمینه‌های فضای شبه‌اقلیدسی $\mathbb{E}^n_s$ برقرار نیست، مثال‌های متعددی از این زیرخمینه‌ها در [۳] ذکر شده است. با توجه به تعریفی که از عملگر L_k بیان خواهد شد و با الهام بخشی از ایده ابررویه‌های بای‌هارمونیک و حدس چن، کاشانی و در ادامه محمدپوری و دیگران [۱، ۲، ۶، ۵] به بررسی ابررویه‌های L_k-بای‌هارمونیک پرداخته‌اند. لازم به ذکر است که وقتی $k = 0$ ابررویه‌های L_0-بای‌هارمونیک همان ابررویه‌های بای‌هارمونیک می‌باشند. در [۱] امینیان و کاشانی حدس چن را به عملگر L_k به‌صورت زیر تعمیم دادند که هر ابررویه L_k-بای‌هارمونیک در فضای اقلیدسی، k-مینیمال است. آنها در همان مقاله نشان دادند که L_k-حدس برای ابررویه‌های اقلیدسی با حداکثر ۲ انحنای اصلی متمایز برقرار است. این نشان داد که L_1- حدس برای رویه های اقلیدسی نیز برقرار است.

فرض کنید $\mathbb{R}^{n+1}_t$ فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^{n+1}$ مجهز به تانسور متری زیر با اندیس $t \geq 0$ باشد

$$\langle , \rangle = -\sum_{i=1}^{t} dx_i \otimes dx_i + \sum_{j=t+1}^{n+1} dx_j \otimes dx_j,$$

که در آن $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ مختصات استاندارد $\mathbb{R}^{n+1}$ است. فرض کنید $x : M^n_s \to \mathbb{R}^{n+1}_t$ غوطه‌وری طولپا از ابررویه‌ی همبند جهت‌پذیر M^n_s با اندیس s بتوی فضای شبه اقلیدسی R^{n+1}_t با نگاشت گاوس N، $\langle N, N\rangle = \varepsilon$ (که $\varepsilon = 1$ اگر $s = t$ یا $\varepsilon = -1$ اگر $s = t - 1$) باشد. فرض کنید ∇، ∇° به‌ترتیب ارتباط‌های لوی-سویتا روی M^n_s و $\mathbb{R}^{n+1}_t$ را نشان دهند. برای هر $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ به‌ترتیب فرمول گاوس و وینگارتن به‌صورت زیر می‌باشد

$$\nabla^\circ_X Y = \nabla_X Y + \varepsilon\langle SX, Y\rangle N,$$
$$SX = -\nabla^\circ_X N,$$

که در آن $S : \mathfrak{X}(M^n_s) \to \mathfrak{X}(M^n_s)$ عملگر شکلی ابررویه همبند M^n_s وابسته به انتخاب جهت N می‌باشد.

رده بندی موضوعی۲۰۱۰: ۳۵B۰۶،۷۰H۳۳ .

تعریف ۱.۱. *چند جمله‌ای مشخصه $Q_S(t)$ وابسته به S به‌صورت زیر تعریف می‌شود*

$$Q_S(t) = det(tI - S) = \prod_{l=1}^{r} det(tI - S_l).$$

قرار می‌دهیم

$$Q_S(t) = \prod_{l=1}^{n}(t - \kappa_l) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^{n-k}, \quad a_0 = 1,$$

که در آن $\{\kappa_1, \ldots, \kappa_n\}$، ریشه‌های(حقیقی یا مختلط) $Q_S(t)$ می‌باشد.

تعریف ۲.۱. *k-امین انحنای میانگین M_s^n به‌صورت زیر تعریف می‌شود*

$$\binom{n}{k} H_k = (-\varepsilon)^k a_k,$$

که در حالت خاص وقتی $k = 1$ داریم $nH_1 = -\varepsilon a_1 = \varepsilon\, \mathrm{tr}(S)$، که $H_1 = H$، همان انحنای میانگین است.

تعریف ۳.۱. *ابررویه M را در فضای لورنتس- مینسکوفسکی $\mathbb{L}^4$، k- ماکسیمال گویند هرگاه*

$$H_{k+1} \equiv 0.$$

مثال ۴.۱. *ابررویه‌های $S_u^m(r) \times \mathbb{R}_{t-u}^{n-m}$ و $\mathbb{H}_{u-1}^m(-r) \times \mathbb{R}_{t-u}^{n-m}$، برای هر $k \geq m$ ، k- ماکسیمال هستند و ابررویه‌های $S_t^n(r)$ و $\mathbb{H}_{t-1}^n(-r)$ در $\mathbb{R}_t^{n+1}$ ، k- ماکسیمال نیستند.*

تعریف ۵.۱. *ابررویه M را در فضای لورنتس- مینکوفسکی، ایزوپارامتریک گوییم هرگاه چندجمله‌ای مینیمال عملگر شکلی آن ثابت باشد.*

تذکر ۶.۱. *یک ابررویه ایزوپارامتریک در $\mathbb{E}^{n+1}$ دارای $q \leq 2$ انحنای اصلی متمایز است. اگر $q = 2$ یکی از انحناهای اصلی باید صفر باشد. ابررویه‌های ایزوپارامتریک در $\mathbb{E}^{n+1}$ به‌صورت موضعی، ابرکره‌ها، ابرصفحه‌ها یا حاصل‌ضرب نشانده در $S^k \times \mathbb{E}^{n-k}$ می‌باشند.*

لم ۷.۱ ([۷])**.** *فرض کنید M ابررویه‌ی شبه ریمانی در $\bar{M}$ و S عملگر شکلی M باشد. همچنین فرض کنید $\bar{M}$ انحنای ثابت داشته باشد، آنگاه داریم*

$$(\nabla_V S)W = (\nabla_W S)V, \ \forall\, V, W \in \mathfrak{X}(M).$$

این رابطه، به معادله کودازی معروف است.

تعریف ۸.۱. *گرادیان تابع $f \in C^\infty(M)$ که به‌صورت ∇f نشان داده می‌شود، هم‌ارز متریک با $\mathrm{d}f$ است. یعنی*

$$\langle \nabla f, X\rangle = \mathrm{d}f(X) = X(f),$$

و در مختصات موضعی داریم

$$\mathrm{d}f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i, \ \nabla f = \sum_i g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\partial_j.$$

تعریف ۹.۱. *فرض کنید V یک میدان برداری روی خمینه شبه‌ریمانی M باشد. دیوژانس V به‌صورت زیر تعریف می‌شود*

$$divV = tr\{X \mapsto \nabla_X V\}.$$

اگر $\{E_1, \ldots, E_n\}$ قاب موضعی از میدان‌های برداری مماس بر M باشد، بدست می‌آوریم

$$\mathrm{div}(V) = \sum_{i,j} g^{ij}\langle \nabla_{E_i} V, E_j\rangle.$$

تعریف ۱۰.۱. *هسیان تابع $f \in F$ که به‌صورت H^f نشان داده می‌شود، مشتق کواریان مرتبه دوم f می‌باشد، یعنی $H^f = \nabla(\nabla f)$.*

تعریف ۱۱.۱. *لاپلاسین تابع $f \in C^\infty(M)$ که به‌صورت $\triangle f$ نشان داده می‌شود، دیوژانس گرادیان f است. یعنی*

$$\triangle f = div(\nabla f).$$

تبدیلات نیوتن برای اولین بار توسط ریلی در مرجع [۸] معرفی شد.

تعریف ۱۲.۱. *k-امین تبدیل نیوتون ابررویه‌ی M_s^n تبدیل خطی $P_k : \mathfrak{X}(M_s^n) \to \mathfrak{X}(M_s^n)$ با ضابطه زیر است*

$$P_k = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} S^j,$$

که $\{a_l\}$ها ضرایب چند جمله ای مشخصه‌ی $Q_S(t)$ وابسته به عملگر شکلی S می‌باشد.

همچنین P_k را می‌توان استقرایی به‌صورت زیرتعریف کرد

$$P_0 = I, \quad P_k = a_k I + S \circ P_{k-1}.$$

با استفاده از قضیه‌ی کیلی همیلتون که بیان می‌کند هر عملگر خطی در معادله مشخصه‌اش صدق می‌کند، نتیجه می‌گیریم $P_n = 0$.

لم ۱۳.۱. *فرض کنید $M_s^n \to \mathbb{R}_t^{n+1}$: ابررویه‌ی غوطه‌ور همبند جهت‌پذیر در فضای شبه اقلیدسی $\mathbb{R}_t^{n+1}$ باشد، آنگاه عملگر P_k خودالحاق است و با S جابجا می‌شود و همچنین تبدیل نیوتن P_k در روابط زیر صدق می‌کند.*

$$\begin{aligned}
&1)\ tr(P_k) = (n-k)a_k = c_k H_k,\\
&2)\ tr(S \circ P_k) = -(k+1)a_{k+1} = \varepsilon c_k H_{k+1},\ 1 \le k \le n-1,\\
&3)\ tr(S^2 \circ P_k) = C_k[nH_1 H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2}],\ 1 \le k \le n-2,
\end{aligned}$$

که در آن

$$(k+1)C_k = c_k = (-\varepsilon)^k (n-k)\binom{n}{k} = (-\varepsilon)^k (k+1)\binom{n}{k+1}.$$

تعریف ۱۴.۱. *عملگر دیفرانسیلی خطی درجه دوم L_k به‌صورت زیر تعریف می‌شود*

$$\begin{aligned}
&L_k : C^\infty(M_s^n) \to C^\infty(M_s^n)\\
&L_k(f) = tr(P_k \circ \nabla^2 f).
\end{aligned}$$

تذکر ۱۵.۱. *در مختصات موضعی داریم*

$$L_k f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j,l} \partial_i(\sqrt{g} g^{jl} P_{k_{i,l}} \partial_j f),$$

که در آن $g = \det(g_{ij})$ دترمینان تانسور متریک g_{ij} و $P_k \partial i = \sum_l P_{k_{i,l}} \partial_l$ می‌باشد.

گزاره ۱۶.۱ ([۴]). *فرض کنید $x : M_s^n \to \mathbb{R}_t^{n+1}$ غوطه‌وری طولیا باشد، آنگاه داریم*

$$L_k x = c_k H_{k+1} N.$$

وقتی $k = 0$، معادله فوق همان معادله کلاسیک لاپلاس-بلترامی $\Delta x = n\overrightarrow{H}$ است که $\overrightarrow{H} = HN$، میدان برداری خمیدگی میانگین را تعریف می‌کند.

لم ۱۷.۱ ([۴]). *برای میدان برداری موقعیت $x : M_s^n \to \mathbb{R}_t^{n+1}$ داریم*

$$\begin{aligned}
L_k^2 x = L_k(L_k x) = &-\varepsilon c_k C_k H_{k+1} \nabla H_{k+1} - 2c_k(S \circ P_k)(\nabla H_{k+1})\\
&- [\varepsilon C_k H_{k+1}(nH_1 H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2}) - L_k H_{k+1}]c_k N.
\end{aligned}$$

تعریف ۱۸.۱. *یک ایزومتری غوطه ور $x : M_s^n \longrightarrow \mathbb{R}_t^{n+1}$ را L_k-هارمونیک گوییم هرگاه*

$$L_k x = 0.$$

با توجه به گزاره ۱۶.۱ ابررویه M_s^n، L_k-هارمونیک است اگر و تنها اگر M_s^n، k-ماکسیمال باشد.

تعریف ۱۹.۱. *ایزومتری غوطه ور $x : M_s^n \longrightarrow \mathbb{R}_t^{n+1}$ را L_k- بای‌هارمونیک گوییم هرگاه*
$$L_k^2 x = 0.$$

با توجه به لم ۱۷.۱ ابررویه M_s^n ، L_k-بای‌هارمونیک است اگر و تنها اگر روابط زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases} \varepsilon C_k H_{k+1} \nabla H_{k+1} = -2(S \circ P_k)(\nabla H_{k+1}), \\ L_k H_{k+2} = \varepsilon C_k H_{k+1}(nH_1 H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2}). \end{cases}$$

با توجه به شرایط فوق واضح است که هر ابررویه L_k-هارمونیک، L_k-بای‌هارمونیک است. عکس این مطلب همواره بدیهی نیست. در این زمینه حدس چن بیان می‌کند که هر ابررویه بای‌هارمونیک، هارمونیک است.

۲. نتایج اصلی

در ادامه کار تحقیقاتی درباره L_k-حدس چن قصد داریم L_k-حدس را برای متریک‌های نامعین و فضاهای شبه اقلیدسی بررسی نماییم و با بیان و اثبات قضیه‌های ۱.۲ و ۲.۲ جواب‌هایی جزیی به حدس چن برای عملگر L_k بدهیم که بیان می‌کند هر L_k-بای‌هارمونیکی، L_k-ماکسیمالی را نتیجه می‌دهد.

قضیه ۱.۲. *غوطه‌وری $\psi : M \longrightarrow \mathbb{L}^3$ از رویه جهت‌پذیر M به فضای لورنتس-مینکوفسکی L^3 را در نظر بگیرید، فرض کنید شرط $L_k^2\psi = 0$ برای یک $k = 0, 1$ برقرار باشد، در این‌صورت $(k+1)$-امین انحنای میانگین صفر است، یا به‌عبارتی غوطه‌وری ψ، k-ماکسیمال است.*

قضیه ۲.۲. *غوطه‌وری $\psi : M \longrightarrow \mathbb{L}^4$ از رویه جهت‌پذیر M به توی فضای لورنتس-مینکوفسکی L^4 را در نظر بگیرید، فرض کنید k-امین انحنای میانگین ثابت باشد و شرط $L_k^2\psi = 0$ برای یک $k \in \{0, 1, 2\}$ برقرار باشد، در این‌صورت $(k+1)$-انحنای میانگین صفر است، یا به‌عبارتی غوطه‌وری ψ، غوطه‌وری k- ماکسیمال است.*

مراجع

[1] M. Aminian, S. M. B. Kashani, L_k-biharmonic hypersurfaces in Euclidean space, Taiwan J Math., **19** (3) (2015), 861-874.

[2] M. Aminian, S. M. B. Kashani, L_k-biharmonic hypersurfaces in space form, Acta Math. Vietnam., **42** (3) (2017), 471-490.

[3] B. Y. Chen, S. Ishikawa, Biharmonic surfaces in pseudo-Euclidean spaces, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. ser A., **45**(1991), 323-347.

[4] P. Lucas, H. F. Ramírez-Ospina, Hypersurfaces in pseudo-Euclidean space satisfying a linear condition on the linearized operator of a higher order mean curvature, Differ. Geom. Appl, **31** (2013), 175-189.

[5] A. Mohammadpouri, F. Pashaie, *On the classification of hypersurfaces in Euclidean spaces satisfying* $L_r \overrightarrow{H}_{r+1} = \lambda \overrightarrow{H}_{r+1}$, Proyecciones J. Math, **35** (1)(2016), 1-10.

[6] A. Mohammadpouri, F. Pashaie, and S. Tajbakhs, L_1-biharmonic hypersurfaces in Euclidean spaces with three distinct principal curvatures, Iran. J. Math. Sci. Inform, **13** (2) (2018), 49-70.

[7] B. O'Neill, Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity, Academic Press, New York, London, 1983.

[8] R. C. Reilly, *Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms*, J. Differential Geom, 8, 3, 1973.

گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران.
آدرس پست الکترونیکی: `r.hoseinoghli@tabrizu.ac.ir`

گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران.
آدرس پست الکترونیکی: `pouri@tabrizu.ac.ir`

فضاهای clp-فشرده حجره‌ای

زهره جمال کاشانی

چکیده. گوییم فضای توپولوژیک X، clp-فشرده حجره ای است هرگاه برای هر خانواده $\mathcal{U}$ از بازهای دو به دو مجزای X، زیرفضای clp-فشرده A وجود داشته باشد به طوری که $\forall U \in \mathcal{U} : A \cap U \neq \emptyset$. در این مقاله به معرفی این دسته از فضاهای توپولوژیک و ارتباط آن با فضاهای فشرده، clp-فشرده و فشرده حجره ای می پردازیم و همچنین برخی ویژگی های توپولوژیک آنها را بررسی می کنیم.
کلمات کلیدی: فشرده حجره ای، clp-فشرده، clp-فشرده حجره ای.

۱. مقدمه

در [۳]، $Tkachuk$ و $Wilson$ به معرفی فضاهای فشرده حجره‌ای پرداخته و ویژگی‌های این دسته از فضاهای توپولوژیک را بررسی کرده‌اند.

تعریف ۱.۱. *فضای توپولوژیک X را فشرده حجره‌ای گوییم هرگاه برای هر خانواده‌ی مجزای $\mathcal{U}$ از زیرمجموعه‌های باز ناتهی X، یک مجموعه فشرده $K \subset X$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $U \in \mathcal{U}$، $K \bigcap U \neq \emptyset$.*

در دو مقاله [۱] و [۲] فضاهای clp-فشرده معرفی گردیده و ثابت شده است که هر فضای همبند و هر فضای فشرده، clp-فشرده است و نیز نتایجی برای زیرفضاها و فضاهای حاصل‌ضربی آنها بیان شده است.

تعریف ۲.۱. *فضای توپولوژیک X را clp-فشرده گوییم هرگاه هر پوشش باز- بسته از فضا دارای زیر پوشش متناهی باشد.*

در این مقاله قصد داریم با ترکیب این دو تعریف، فضای جدید clp-فشرده حجره‌ای را معرفی کرده و برخی از ویژگی‌های آن و نیز ارتباط آن با دو فضای clp-فشرده و فشرده حجره‌ای را بررسی کنیم.

تعریف ۳.۱. *فضای توپولوژیک X را clp-فشرده حجره‌ای گوییم هرگاه برای هر خانواده $\mathcal{U}$ از بازهای دو به دو مجزای X، زیرفضای clp-فشرده A وجود داشته باشد به‌طوری که $\forall U \in \mathcal{U} : A \cap U \neq \emptyset$.*

تعریف ۴.۱. *فضای X را صفر- بعدی می‌گوئیم اگر X فضایی T_1 و ناتهی و دارای پایه‌ای شامل مجموعه‌های بسته- باز باشد.*

تعریف ۵.۱. *گوییم یک فضای توپولوژیک در ویژگی CCC صدق می‌کند هرگاه هر خانواده از زیرمجموعه‌های باز دو به دو مجزای آن شمارا باشد.*

۲. نتایج اصلی

در این قسمت به بیان برخی قضایا و مثال‌های مربوط به فضای clp-فشرده حجره‌ای می‌پردازیم.
با توجه به تعریف فضاهای clp-فشرده و clp-فشرده حجره‌ای قضیه زیر نتیجه می‌شود.

قضیه ۱.۲. *هر فضای clp-فشرده، clp-فشرده حجره‌ای است.*

چون هر فضای فشرده، clp-فشرده است، می‌توان قضیه زیر را بیان کرد.

قضیه ۲.۲. *هر فضای فشرده حجره‌ای، clp-فشرده حجره‌ای است.*

رده بندی موضوعی۲۰۱۰: ۵۴D۲۰،۵۴D۵۵ .
سخنران: زهره جمال کاشانی .

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه‌ی ۲.۲ برقرار نیست.

مثال ۳.۲. *در فضای $X = [0, 1]$، زیرفضای $L = [0, 1] \setminus \{\frac{1}{n} : n = 0, 1, \dots\}$ نه فشرده و نه همبند است ولی clp-فشرده و در نتیجه clp-فشرده حجره‌ای است. همچنین L فشرده حجره‌ای نیست، زیرا اگر فرض خلف کنیم، چنین باشد و اگر در بازه $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1})$، بازهای مجزایی را در نظر بگیریم که هرچه به $\frac{1}{n+1}$ نزدیک می‌شویم طول بازه کوچک‌تر شود، در این‌صورت طبق فرض باید زیرمجموعه فشرده C وجود داشته باشد که همه این بازهای مجزا را قطع می‌کند. از اشتراک مجموعه C با هریک از این بازها عضوی را انتخاب می‌کنیم و دنباله‌ی (x_n) را می‌سازیم. چون C فشرده است، فشرده دنباله‌ای نیز می‌باشد و باید نقطه حدی دنباله‌ی (x_n) داخل بازه باشد، که چنین نیست.*

قضیه ۴.۲. *اگر X فضایی صفربعدی و clp-فشرده حجره‌ای باشد، آنگاه X فشرده حجره‌ای است.*

اثبات. فرض کنیم $\mathcal{U}$ خانواده‌ی بازهای دو به دو مجزا در X باشد. طبق فرض زیرفضای clp-فشرده $A \subseteq X$ وجود دارد به‌طوری‌که همه‌ی اعضای $\mathcal{U}$ را قطع می‌کند. از طرفی چون هر فضای صفربعدی و clp-فشرده، فشرده است، نتیجه می‌شود که A، فشرده بوده و لذا فضای X، فشرده حجره‌ای می‌شود. □

قضیه ۵.۲. *هر فضای نامتناهی X با توپولوژی گسسته، clp-فشرده حجره‌ای نیست.*

اثبات. خانواده‌ی $\mathcal{U} = \{\{x\} : x \in X\}$ از بازهای دو به دو مجزا در X را در نظر می‌گیریم. فرض خلف می‌کنیم که X، clp-فشرده‌ی حجره‌ای باشد. لذا زیرفضای clp-فشرده‌ای مانند $A \subseteq X$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $x \in X$، $A \cap \{x\} \neq \emptyset$ ، یعنی $A = X$. اما X نمی‌تواند clp-فشرده باشد. زیرا $\mathcal{U}$ پوشش باز-بسته از X است که زیرپوشش متناهی ندارد. بنابراین فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۶.۲. *هر زیرفضای باز-بسته‌ی Y از فضای clp-فشرده حجره‌ای X، clp-فشرده حجره‌ای است.*

اثبات. خانواده‌ی $\mathcal{U}$ از بازهای دو به دو مجزای Y را در نظر می‌گیریم. چون Y در X باز است، اعضای $\mathcal{U}$ در X نیز باز هستند. طبق فرض، زیرفضای clp-فشرده A از X وجود دارد که $\forall U \in \mathcal{U} : A \cap U \neq \emptyset$. از طرفی $A \cap U$ زیرفضایی باز-بسته از فضای clp-فشرده‌ی A است و لذا clp-فشرده می‌شود و نیز $A \cap Y \cap U \neq \emptyset$. بنابراین Y، clp-فشرده حجره‌ای است. □

مثال بعد نشان می‌دهد که یک زیرفضای بسته از یک فضای clp-فشرده حجره‌ای، لزوماً clp-فشرده حجره‌ای نیست.

مثال ۷.۲. *فضای $\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. چون این فضا همبند است، clp-فشرده و در نتیجه clp-فشرده حجره‌ای است. زیرفضای نامتناهی و گسسته $\mathbb{N}$ از آن clp-فشرده نیست و همچنین اگر $\mathcal{U} = \{\{1\}, \{2\}, \dots\}$ خانواده‌ای از بازهای دو به دو مجزای $\mathbb{N}$ را در نظر بگیریم، هیچ زیرمجموعه‌ی clp-فشرده در $\mathbb{N}$ وجود ندارد که همه‌ی اعضای $\mathcal{U}$ را قطع کند، لذا $\mathbb{N}$، clp-فشرده حجره‌ای نیست.*

مثال بعد نشان می‌دهد که یک زیرفضای باز از یک فضای clp-فشرده حجره‌ای، لزوماً clp-فشرده حجره‌ای نیست.

مثال ۸.۲. *فضای $I_0^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ فضایی فشرده و در نتیجه فشرده حجره ای، clp-فشرده و clp-فشرده حجره ای است. زیرفضای $A = \bigcup(\{x\} \times (0, 1))$ را در نظر می‌گیریم. زیرمجموعه‌های باز-بسته در A، همان میله‌های عمودی هستند. اگر $\mathcal{U}$ پوشش A شامل میله‌های عمودی باشد، $\mathcal{U}$ زیرپوشش متناهی ندارد و لذا A، clp-فشرده نیست. همچنین $\mathcal{U}$ خانواده‌ای از بازهای دو به دو مجزا در A است ک هیچ مجموعه‌ی clp-فشرده‌ای در A وجود ندارد که همه این میله‌های عمودی را قطع کند، در نتیجه A، clp-فشرده حجره‌ای نیست.*

قضیه ۹.۲. *اگر فضای توپولوژیک X، clp-فشرده حجره‌ای بوده و $f : X \longrightarrow Y$ تابعی پیوسته و پوشا باشد، در این‌صورت فضای توپولوژیک Y نیز، clp-فشرده حجره‌ای است.*

اثبات. فرض کنیم $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ خانواده‌ی بازهای دوبه‌دو مجزا در Y باشد. با توجه به پیوستگی تابع f، $\mathcal{U}' = \{f^{-1}(U_i) : i \in I\}$ خانواده‌ی بازهای دوبه‌دو مجزا در X است، و لذا طبق فرض زیرفضای clp-فشرده‌ی $A \subseteq X$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\forall i \in I : A \cap f^{-1}(U_i) \neq \emptyset \Rightarrow f(A \cap f^{-1}(U_i)) \neq \emptyset \Rightarrow f(A) \cap U_i \neq \emptyset$$

حال طبق قضیه‌ای در [۲]، $f(A)$ زیرفضایی clp-فشرده در Y است و لذا Y نیز clp-فشرده حجره‌ای می‌شود. □

قضیه ۱۰.۲. *اگر X فضایی باشد که در CCC صدق می‌کند و همچنین برای هر زیرمجموعه‌ی گسسته و شمارای $A \subseteq X$، $\overline{A}$، clp-فشرده باشد، در این‌صورت X، clp-فشرده حجره‌ای است.*

اثبات. فرض کنیم $\mathcal{U}$ خانواده بازهای دو به دو مجزای X باشد، طبق فرض $\mathcal{U}$ شماراست. برای هر $U \in \mathcal{U}$، $x_U \in U$ را انتخاب کرده و قرار می‌دهیم $A = \{x_U : x_U \in U\}$. A مجموعه‌ای شمارا و گسسته است، لذا طبق فرض $\overline{A}$، clp-فشرده حجره‌ای است و از طرفی همه‌ی اعضای $\mathcal{U}$ را قطع می‌کند، بنابراین X فضایی clp-فشرده حجره‌ای است. □

قضیه ۱۱.۲. *اگر X فضایی clp-فشرده حجره‌ای بوده و $p \in X$ نقطه‌ای تنها باشد، در این‌صورت $X \setminus \{p\}$ نیز clp-فشرده حجره‌ای است.*

اثبات. فرض کنیم $\mathcal{U}$ خانواده ای از بازهای دو به دو مجزا در $X \setminus \{p\}$ باشد که در واقع بازهایی دو به دو مجزا در X هستند. در این‌صورت زیرفضای clp-فشرده $A \subseteq X$ وجود دارد که همه اعضای $\mathcal{U}$ را قطع می‌کند. اگر $p \notin A$، آن گاه $A \subseteq X \setminus \{p\}$ و حکم ثابت می شود؛ اگر $p \in A$، چون p نقطه‌ی تنهاست، تنها عضو از پوشش‌های باز-بسته که شامل p می‌باشد مجموعه $\{p\}$ است و لذا $A \setminus \{p\}$ نیز زیرفضایی clp-فشرده بوده و حکم ثابت می‌شود. □

مراجع

[1] D. Dikranjan, CLP-compactness for topological spaces and groups, Topology and its Applications, **154** (2007) 1321–1340.

[2] J. Steprans , A. P. Sostak, Restricted compactness properties and their preservation under products, Topology and its Applications, **101** (2000) 213–229.

[3] V. V. Tkachuk and R. G. Wilson, Cellular-compact spaces and their applications, Depatment of mathematics, University Autonoma Metropolitana, 2019.

دانشکده ریاضی، دانشگاه کاشان.
آدرس پست الکترونیکی: `arghavan206@gmail.com`

نظریه رمزی در سیستم‌های دینامیک و فشرده‌سازی استون-چخ

محمد اکبری توتکابنی

چکیده. فشرده‌سازی استون چخ حاصل از نیمگروه جمعی اعداد طبیعی، به عنوان اسپکتروم C^*-جبر $l^\infty(\mathbb{N})$ فضایی فشرده و هاسدورف است، که در بررسی نظریه رمزی در اعداد طبیعی نقش مهمی ایفا می‌کند. همچنین، سیستم دینامیک القا شده توسط نیمگروه جمعی اعداد طبیعی، نیز قابلیت‌های فراوانی در این بررسی‌ها ایفا می‌نماید.
در این مقاله، سعی بر این است تا با مرور برخی از رخدادهای مهم در (سیستم دینامیک-نظریه رمزی) و (جبر استون-چخ-نظریه رمزی) بعضی از نتایج به‌دست آمده را بیان کنیم.

کلمات کلیدی: فشرده سازی استون-چخ، خودتوان مینیمال، مجموعه‌های مرکزی، سیستم‌های دینامیک.

۱. مقدمه

قبل از آغاز سخن، مفاهیم مقدماتی سیستم‌های دینامیک، از قبیل زیرمجموعه پایا، اوربیت، سیستم مینیمال، نقطه مینیمال و ... را دانسته شده فرض می‌کنیم. برای آشنایی می‌توانید به [۱] مراجعه نمایید.

اوایل قرن بیستم، ون در واردن در پاسخ به یک سوال باز، ثابت کرد که هر افراز متناهی از اعداد طبیعی، حاوی یک حجره است که دارای تصاعدهای حسابی به طول دلخواه است. اردوش و توران، متوجه شدند که در هر افراز متناهی از اعداد طبیعی، یکی از حجره‌ها دارای چگالی مثبت است. یعنی عدد

$$\overline{d}(A) = limsup_{n\to\infty}\frac{|A\cap\{۱,\ldots,n\}|}{n}$$

برای آن حجره، عددی مثبت است. آنان سوالی را مطرح نمودند که در سال ۱۹۷۴ توسط زمردی، ثابت شد. زمردی ثابت کرد که هر زیرمجموعه از اعداد طبیعی با چگالی مثبت، دارای تصاعد حسابی به طول دلخواه است. وی در اثبات خود، به کمک گراف‌های دوبخشی و گروه‌ها، حدس اردوش و توران را حل نمود. در سال ۱۹۷۸، فرشتنبرگ به کمک سیستم‌های دینامیک و یک ورژن جدید از قضیه بازگشتی پوانکاره، توانست قضیه زمردی را اثبات نماید. اگرچه اثبات حدس اردوش و توران به نام زمردی، ثبت شد اما دریچه‌ای که فرشتبرگ و همکارانش در این زمینه گشودند، تاثیری شگرف در تحقیقات ریاضی در حوزه نظریه رمزی در سالیان اخیر داشته است. فرشتنبرگ و همکارش برای اثبات قضیه زمردی، نشان دادند که اگر A یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی از اعداد طبیعی دارای چگالی مثبت باشد، آنگاه C^*-زیرجبر تولید شده $\mathbf{A}$ توسط مجموعه

$$\{\chi_{-n+A} : n\in\mathbb{N}\}\cup\{\chi_{\mathbb{N}}\}$$

جدایی‌پذیر و در نتیجه بنا به قضیه گلفاند با $C(X)$ ایزومتریکال ایزومورفیسم است، که

$$-n+A=\{m : n+m\in A\}$$

و X اسپکتروم C^*-زیر جبر $\mathbf{A}$ است. او همچنین نشان داد که $\Gamma : \mathbf{A}\to\mathbb{C}$ با ضابطه

$$\Gamma(f) = lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=۱}^{n} f(k)}{n}$$

یک میانگین است و با توجه به قضیه نمایش ریس، اندازه بورل احتمال μ روی X چنان هست که یک سیستم حافظ اندازه $(X,\mathcal{B}(X),\mu,T)$ القا می‌نماید. به‌طوریکه برای یک زیر مجموعه اندازه‌پذیر بورل از X روابط زیر برقرار است

رده بندی موضوعی۲۰۱۰: ۵۸H۰۵، ۲۲A۲۲ .
سخنران: محمد اکبری توتکابنی.

الف) $\overline{d}(A) = \mu(B)$.
ب) برای هر مجموعه متناهی F از اعداد حسابی، داریم

$$\overline{d}(\bigcap_{n\in F} -n + A) \geq \mu(\bigcap_{n\in F} T^{-n}B). \tag{۱.۱}$$

این قضیه به قضیه اصل تناظر فرشتنبرگ مشهور است. این قضیه پلی بین زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی با چگالی مثبت و سیستم‌های دینامیک به‌وجود می‌آورد. در واقع این امکان را فراهم می‌سازد تا یک مساله طرح شده برای مجموعه‌های با چگالی مثبت، به یک چالش در سیستم دینامیک بدل شود.

اما وجود این ارتباط، به معنای پایان کار نبود. فرشتنبرگ و همکاران به قضیه‌ای نیاز داشتند تا بتواند ناصفر بودن سمت راست رابطه‌ی (۱.۱) را تضمین نماید.

قضیه ۱.۱. *فرض کنید $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ یک سیستم حافظ اندازه احتمال باشد. در این‌صورت برای هر عدد طبیعی k و هر مجموعه‌ی اندازه‌پذیر A با اندازه مثبت داریم*

$$liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} \mu(A\cap T^{-i}(A)\cap T^{-2i}(A))\cap\cdots\cap T^{-ki}(A)}{n+1} > 0$$

بنابراین با توجه به قضیه فوق،برای تعداد نامتناهی عدد طبیعی n داریم

$$\overline{d}(A\cap -n+A\cap -2n+A\cap\cdots\cap -nk+A) > 0.$$

لذا برای هر عدد طبیعی k، عدد طبیعی n چنان هست که

$$A\cap -n+A\cap -2n+A\cap\cdots\cap -nk+A \neq \emptyset.$$

در نتیجه برای یک عدد طبیعی a خواهیم داشت

$$\{a, a+n, a+2n, \ldots, a+nk\} \subseteq A.$$

حال اگر برای هر عدد طبیعی k، همریختی f_k را روی اعداد طبیعی با ضابطه $f_k(x) = nx$ در نظر بگیرید، قضیه زمردی به‌صورت زیر توسیع می‌یابد.

قضیه ۲.۱. *فرض کنید F مجموعه‌ای متناهی از چندجمله‌ای‌های با ضرایب صحیح باشد، که صفر یک ریشه آنهاست، برای هر افراز متناهی از اعداد طبیعی، یک حجره C و اعداد طبیعی a و b موجودند که*

$$\{a + P(b) : P \in F\} \subseteq C.$$

قضیه فوق یک ورژن پیشرفته از قضیه وان-در-واردن است که به قضیه چندجمله‌ای وان در واردن مشهور است. این قضیه توسط برگلسون دانشجوی فرشتنبرگ اثبات شده است. برای اطلاعات بیشتر و مشاهده قضایای معادل با قضیه وان در واردن و نیز تعمیمهایی از آن به [۴] مراجعه نمایید. چنانچه تمایل دارید تا تعمیم مفاهیم فوق را به زیرگروه‌های میانگین‌پذیر مشاهده نمایید، [۱] پیشنهاد می‌شود.

حال برای چندجمله‌ای $p(x)$، تابع $F_p : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ با ضابطه $F_p(x, y) = x + p(y)$ در نظر بگیرید. دراین‌صورت قضیه قبل به‌صورت زیر قابل بیان است.

قضیه ۳.۱. *برای هر مجموعه متناهی T از چندجمله‌ای‌های با ضرایب صحیح، که صفر یک ریشه آن است، اگر اعداد طبیعی به تعداد متناهی مجموعه افراز شود آنگاه حجره C و نقطه (a, b) در $\mathbb{N}^2$ چنان هست که*

$$\{F_p(a, b) = a + p(b) : p \in T\} \subseteq C.$$

بنابراین به‌طور طبیعی، مایلیم بدانیم که برای یک مجموعه متناهی از توابع از $\mathbb{N}^k$ به $\mathbb{N}$ مانند F، آیا برای هر افراز متناهی از اعداد طبیعی، حجره C و عنصر $x \in \mathbb{N}^k$ یافت می‌شود که

$$\{f(x) : f \in F\} \subseteq C.$$

هر مجموعه متناهی از توابع، با خاصیت فوق را خانواده رمزی نامیده می‌شود. ما می‌دانیم که مجموعه‌های متناهی

$$\{f(x, y) = x, g(x, y) = x, h(x, y) = x + y\}$$

و $\{f(x,y)=x, g(x,y)=y, p(x,y)=xy\}$ خانواده‌های رمزی هستند. در خصوص ترکیبات خطی، تحقیقات فراوانی انجام شده و خانواده های رمزی با مدل خطی به‌طور دقیق مشخص شده‌اند. با این وجود ما هنوز نمی‌دانیم که آیا

$$\{x^۲, y^۲, x^۲+y^۲\}$$

خانواده رمزی هست یا نه؟ همچنین تا سال ۲۰۱۷، نمی‌دانستیم که آیا مجموعه $\{x, y, x+y, xy\}$ خانواده رمزی هست یا خیر؟ موریرا و برگلسون در [۲] ثابت کردند که در میدان‌های شمارا، $\{x, y, x+y, xy\}$ خانواده رمزی است، البته قبل از آنها ثابت شد که $\{x, y, x+y, xy\}$ در میدان‌های متناهی خانواده‌ای رمزی است. در هر حال تکنیک‌های به کار گرفته شده، در اعداد طبیعی قابلیت اجرا نداشت. موریرا در [۵] ثابت کرد که $\{xy, x+y\}$ خانواده رمزی است.

موازی با تحقیقاتی که فرشتنبرگ و همکارانشان، به کمک سیستم‌های دینامیک و ارگودیک تئوری در نظریه رمزی و نظریه جمعی اعداد طبیعی می‌نمودند، عده‌ای دیگر از ریاضیدانان از مسیری دیگر تلاش داشتند تا مفاهیم جدید و نویی را در این حوزه رقم بزنند. شاید یکی از نقش‌آفرینان برجسته در این راستا، نیل هیندمن باشد. وی در سال ۱۹۷۴، قضیه جمع‌های متناهی را با یک اثبات ترکیبیاتی مقدماتی مطرح کرد، که البته اصل این قضیه منسوب به اف. گالوین می‌باشد. در همان سال، یک اثبات ترکیبیاتی ساده‌تر توسط ج. بومگارتنر ارائه گردید و در سال ۱۹۷۸، فرشتنبرگ و ویس یک اثبات سیستم دینامیکی برای آن ارائه دادند. آنچه که در اینجا اهمیت دارد، نقش جبر استون-چخ در شکل‌گیری اثباتی ساده‌تر و پویاتر است.

قضیه ۴.۱ ([۳]). *برای هر افراز متناهی از اعداد طبیعی یک حجره C و یک دنباله $\{x_n\}$ از اعداد طبیعی وجود دارد که*

$$FS(\{x_n\}) = \{\sum_{k\in F} x_k : \emptyset < |F| < \infty\} \subseteq C.$$

ریشه اثبات قضیه جمع‌های متناهی، در این است که در هر افراز متناهی از اعداد طبیعی، یکی از حجره‌ها عضوی از یک خودتوان در فشرده‌سازی استون-چخ اعداد طبیعی است. با کمی دقت بیشتر، مجموعه‌های دیگری مشخص می‌شوند که از خواص بیشتری برخوردارند. این مجموعه‌ها به مجموعه‌های مرکزی اشتهار دارند و اولین بار توسط فرشتنبرگ معرفی شدند. این مجموعه‌ها در اعداد طبیعی، عناصری از خودتوان‌های مینیمال در فشرده‌سازی استون-چخ $\beta\mathbb{N}$ هستند.

۲. سیستم دینامیک و فشره سازی استون-چخ

یک ابرفیلتر روی اعداد طبیعی، یک گردایه از زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی مانند p است که دارای خاصیت مقطع متناهی باشد و برای هر زیرمجموعه A از اعداد طبیعی که $A \notin p$ مجموعه $B \in p$ چنان موجود باشد که $A \cap B = \emptyset$. گردایه همه ابرفیلترها روی اعداد طبیعی را با $\beta\mathbb{N}$ نمایش می‌دهیم. برای هر زیرمجموعه A از اعداد طبیعی، گردایه مجموعه‌های به فرم $\overline{A} = \{p \in \beta\mathbb{N} : A \in p\}$ تشکیل یک پایه توپولوژی می‌دهد و $\beta\mathbb{N}$ نسبت به این توپولوژی فضایی فشرده و هاسدورف است. عمل باینری جمع به‌طور یکتا به $\beta\mathbb{N}$ توسیع می‌یابد، با خصوصیات زیر

- انتقال‌های راست پیوسته‌اند.
- برای هر $n \in \mathbb{N}$، انتقال‌های چپ پیوسته‌اند. یعنی نگاشت $\lambda_n : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ باضابطه $\lambda_n(x) = n + x$ تابعی پیوسته است.
- $A \in p + q$ اگر وتنها اگر $\{s \in \mathbb{N} : -s + A \in q\} \in p$.
- هر ایده‌ال چپ مینیمال شامل یک خودتوان مینیمال است.
- مجموعه اعداد طبیعی در $\beta\mathbb{N}$ چگال است.

به راحتی دیده می‌شود که $(\beta\mathbb{N}, \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ یک سیستم دینامیک توپولوژیک است. L یک زیرسیستم مینیمال است اگر و تنها اگر L، ایده‌ال چپ مینیمال باشد.

قضیه ۱.۲. *فرض کنید P خانواده ایی نامتناهی از توابع از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ باشد(توابع حسابی). تابع $\phi : P\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ با ضابطه $\phi(f,x) = f(x)$ در نظر بگیرید. آنگاه ϕ دارای توسیعی یکتا به تابع*

$$* : \beta P \times \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$$

که در خصوصیات زیر صدق می‌نماید.

الف) برای هر $f \in P$ و هر $x \in \mathbb{N}$، $f * x = f(x)$.

ب) برای هر $x \in \beta\mathbb{N}$، تابع $R_x : \beta P \to \mathbb{N}$ با ضابطه $R_x(G) = G * x$ پیوسته است.

ج) برای هر $g \in P$، تابع $L_g\beta : \mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ با ضابطه $L_g(x) = g * x$ پیوسته است.

قضیه ۲.۲. *فرض کنید P خانواده‌ایی نامتناهی از توابع حسابی و A زیرمجموعه‌ایی از اعداد طبیعی باشد. آنگاه گزاره‌های زیر برقرارند.*

الف) برای هر $f \in P$ و هر $x \in \mathbb{N}$، $A \in f * x$ اگر و تنها اگر $f^{-1}(A) \in x$.

ب) برای هر $G \in \beta P$ و هر $x \in \mathbb{N}$، $A \in G * x$ اگر و تنها اگر $\{f \in P : f^{-1}(A) \in x\} \in G$.

قضیه زیر در واقع کاربردی از دو قضیه قبل در تشخیص خانواده‌های رمزی است. فقط کافی است توجه داشته باشیم که قضایای فوق را می‌توان برای خانواده‌ایی از توابع از $\mathbb{N}^k$ به $\mathbb{N}$ نیز بیان نمود. دراین‌صورت خواهیم داشت

قضیه ۳.۲. *خانواده متناهی P از توابع از $\mathbb{N}^k$ به $\mathbb{N}$ مفروض است. خانواده متناهی P رمزی است اگر و تنها اگر $x \in \beta\mathbb{N}$ و $y \in \beta\mathbb{N}^k$ موجود باشند که*

$$f * y = x, \quad \forall f \in P.$$

مراجع

[1] V. Bergelson, Combinatorial and Diophantine Applications of Ergodic Theory, HANDBOOK OF DYNAMICAL SYSTEMS, VOL. 1B, 2006.

[2] V. Bergelson and J. Moreira, Ergodic theorem involving additive and multiplicative groups of a field and $\{x+y, xy\}$ patterns, Ergod. Th. Dynam. Sys, **37** (2017), 673–692.

[3] N. Hindman and D. Strauss, Algebra in the Stone-Čech Compactification: Theory and Applications, second edition, de Gruyter, Berlin, 2011.

[4] R. McCutcheon, Elemental Methods in Ergodic Ramsey Theory, Lecture notes in mathematics, Springer-Verlag, 1999.

[5] J. Moreira, Monochromatic sums and products in $\mathbb{N}$, Annals of Mathematics **185** (2017), 1069–1090.

دانشگاه گیلان-دانشکده علوم ریاضی-گروه ریاضی محض

آدرس پست الکترونیکی: `tootkaboni.akbari@gmail.com`

بررسی تاثیرات روش‌های ارزشیابی فرایند محور بر ارتقاء حلِ مساله‌ی هندسی و اعتماد به نفس دانش‌آموزان

محمد نکوفر

چکیده. هر چند که سواد ارزشیابی یک حوزه پژوهشی نوپا است ولی ارزشیابی همواره‌یکی از دغدغه‌های مهم در آموزش و به ویژه آموزش ریاضی به شمار رفته‌است. اصطلاح سواد ارزشیابی نشان می‌دهد که ملزومات ارزشیابی کار ساده و پیش پا افتاده‌ای نیست و دست اندرکاران امر ارزشیابی از قبیل معلمان و مدیران باید بریک سری از اصول و مهارتهای لازم در این راستا مسلط شوند. روش‌های سنتی به‌ارزشیابی به‌عنوان آخرین گام فرایند تدریس نگاه می‌کنند و آن را ابزاری مفید برای تصمیم‌گیری در مورد ارتقاء یا عدم ارتقاء دانش‌آموز به پایه‌ی بالاتر به شمار می‌آورند ولی روش‌های نوین ارزشیابی را بخش لاینفکی از فرایند یاددهی- یادگیری قلمداد می‌کنند و بر راهنمایی یادگیرنده و فرایند یادگیری تمرکز می‌کنند تا اینکه بر طبقه‌بندی دانش‌آموزان تمرکز کنند. در فرایند پیچیده‌ی تعلیم و تربیت در دنیای معاصر سواد سنتی به تنهایی کافی نیست. از اینرو اصطلاحات و مفاهیم جدیدی مانند سواد کامپیوتر، سواد شفاهی ، سواد آماری و سواد ارزشیابی پدید آمده‌اند. بنا بر نظر گانیه، تدریس عبارت است از فرایند طراحی و تنظیم رویدادهای بیرونی یادگیری که فرایند درونی‌سازی یادگیری را تسهیل می‌کنند. از اینرو ارزشیابی موثر تنها برای طبقه‌بندی وغربال‌گری دانش‌آموزان به‌کار نمی‌رود، بلکه می‌تواند انگیزه دانش‌آموزان را ارتقاء دهد و در ارزشیابی فرایندها به معلمان کمک کند. لوفران سوا (۱۹۹۱) جایگاه ارزشیابی و رابطه آن با تدریس را در فرایندهای پیش از تدریس، ضمن تدریس و پس از تدریس تبیین می‌کند. این بدان معناست که ارزشیابی می‌تواند به‌عنوان یک عامل موثر در فرایند یاددهی-یادگیری به کار رود . هدف از تحقیق حاضر بررسی تاثیرات استفاده از روش‌های ارزشیابی فرایندمحور برحل مسائل ریاضی وهندسه، اعتماد به نفس و احساس راحتی دانش‌آموزان در کلاس‌های درس هندسه ۲ است .

کلمات کلیدی: ارزشیابی موثر آموزشی، ارزشیابی فرایند محور، اعتماد به نفس، سواد ارزشیابی.

۱. مقدمه

سواد ارزشیابی به دانش، مهارت‌ها و قابلیت‌هایی اشاره دارد که معلمان باید دارا باشند و قادر باشند با استفاده‌از این مهارت‌ها استنباط‌های متناسبی را در مورد یادگیری دانش‌آموزان ایجاد کنند و معیارهایی را برای عملکرد بر اساس این استنباط‌ها برای افزایش موفقیت دانش‌آموزان، ایجاد کنند. سواد ارزشیابی برای معلمان در تمام سطوح مختلف تحصیلی از ابتدایی تا آموزش عالی، یک توانمندی کلیدی به شمار می‌رود. برخی از محققان، ارزشیابی را مرحله‌ای حیاتی از تدریس معرفی می‌کنند.

فایده سواد ارزشیابی در درجه اول نصیب خود معلمان در تدریس و آزمون‌های آنها می‌شود بنابر نظر باندل و اولوواتایو(۲۰۱۳) از لحاظ روش‌شناسی آموزشی برای همه معلمان صرف نظر از جنسیت، سابقه و موضوع تدریس مفید است که سواد ارزشیابی داشته باشند تا بتوانند منابع مناسب اطلاعاتی را انتخاب کرده و درباره دقت ارزشیابی و قضاوت و چرایی و نحوه‌ی استفاده‌از ارزشیابی اطمینان حاصل کنند.

قضاوت صحیح و عمق و گستره‌ی یادگیری باید مبتنی بر قرائن و داده‌های مستندی باشد که در طی فرایند یاددهی- یادگیری جمع‌آوری شده است. ارزشیابی خوب و مفید تنها از طریق سطح متناسبی از سواد ارزشیابی میسر می‌شود . شیوه‌های سنتی ارزشیابی در مدارس نه تنها تصویر صحیحی از آنچه را که دانش‌آموزان یادگرفته‌اند به ما نمی‌دهند، بلکه قابلیت‌های یادگیری دانش‌آموزان را با پدید آوردن احساس ترس نسبت به امتحانات و در نهایت ایجاد نفرت و بی‌میلی برای یادگیری مطالب تضعیف می‌کنند. این امر در مورد ریاضیات نیز صدق می‌کند که در تحقیقات آموزش ریاضی از آن تحت عنوان ریاضی هراسی یاد می‌شود (مثلاً کلمنتس و الرتون، ۱۹۹۶؛ تئودور، ۱۹۹۸). ریاضی هراسی مانعی بر سر راه تدریس و یادگیری علوم ریاضی حتی در کشورهای

رده بندی موضوعی۲۰۱۰: ۴۶L۵۴. ۴۶L۶۵،

سخنران: محمد نکوفر .

پیشرفته است چه رسد به کشور در حال توسعه‌یا توسعه نیافته که وضع بهتر از این نیست. لئونهارد (۲۰۰۸) معتقد است که در اروپا " یک فرهنگ ریاضی هراسی " وجود دارد و تئودور(۱۹۹۸) از روند افزایش ریاضی هراسی و تکنیک هراسی و کاهش ثبت نام در رشته‌های علوم ریاضی و تکنولوژی و فنی سخن می‌گوید. در اینجا ما می‌توانیم ببینیم که روش‌های ارزشیابی چگونه می‌تواند این موقعیت را بدتر کند یا بهبود بخشند. از اینرو معلمان به‌طور عام و معلمان ریاضی به‌طور خاص لازم است روشهای ارزشیابی موثر را یاد بگیرند و به کار ببندند.

تحقیقات درباره‌ی سواد ارزشیابی معلمان نشان می‌دهد که بسیاری از معلمان فاقد سواد ارزشیابی هستند (بال و همکاران، ۱۹۹۸؛ استیگینز ۱۹۹۲؛ ویگنز، ۱۹۸۲).

ساکس (۱۹۹۷) معتقد است که ارزشیابی مرحله‌ی حیاتی تدریس است و می‌تواند تعیین کند که آیا اهداف آموزشی محقق شده‌اند یا خیر؟ امروزه لازم است که از روش‌های سنتی ناکارآمد فاصله بگیریم و به سمت روش‌های مفید و مناسب حرکت کنیم. متاسفانه اکثر معلمان به همان شیوه‌ای درس می‌دهند و امتحان می‌گیرند که خود به‌عنوان دانش‌آموز تجربه کرده‌اند و در واقع چهار سال دوره دانشگاهی هیچ تاثیری در تدریس آنها نداشته است. این شیوه موروثی معلمان در ارزشیابی باعث شده است که آنها به‌امتحان صرفاً به‌عنوان ابزاری نگاه کنند که با آن می‌توان یک نمره یک رقمی یا دو رقمی از صفر تا بیست به دانش‌آموزان داد، در چنین موقعیتی کل آموزش در خدمت امتحانات نهایی قرار می‌گیرد در حالی‌که باید کل نظام آموزشی و ارزشیابی در خدمت یاددهی و یادگیری باشد یعنی آموزش نباید فدای ارزشیابی شود.

پاپهم (۲۰۰۴) بیان می‌دارد که« تدریس مفید و کارآمد بدون سواد ارزشیابی عملاً غیرممکن است و تدریس بدون سواد ارزشیابی را نوعی خودکشی می‌داند». بدین‌ترتیب روند جاری آموزش در علوم و ریاضیات به جامعه آموزشی علامت هشدار می‌دهد . پس محققان می‌توانند با ارائه راهنمایی‌های سازنده و آموزنده، آموزشگران را در حد مشکلات جاری آموزش کمک کند . متاسفانه درباره‌ی تاثیر ارزشیابی برای یادگیری از طریق روش‌های ارزشیابی فرایندمحور بر ارتقاء یادگیری و عملکرد دانش‌آموزان و فاکتورهای روان‌شناختی مانند اعتماد به نفس و احساس راحتی در کلاس‌های هندسه تحقیقات کافی صورت نگرفته‌است . پژوهش حاضر می‌کوشد پیشینه‌ی ارزشیابی هندسه را در این زمینه پر بار سازد . محققان می‌خواهند بدانند که آیا استفاده از روش‌های ارزشیابی فرایندمحور با تاکید بر مفهوم «ارزشیابی برای یادگیری» تاثیرات مثبتی بر حل مسائل هندسی و اعتماد به نفس دانش‌آموزان و کاهش استرس و اضطراب آنها در امتحانات ریاضی دارد؟

۲. پیشینه‌ی نظری تحقیق

ارزشیابی یکی از مولفه‌های کلیدی آموزش نوین است. ویلیام (۲۰۱۳) معتقد است که «دانش‌آموزان ما آنچه را که تدریس می‌کنیم یاد نمی‌گیرند، اگر دانش‌آموزان ما آنچه را که درس می‌دهیم، یاد می‌گرفتند هرگز نیازی به‌ارزشیابی نبود. این واقعیت ساده و ژرف بدان معناست که ارزشیابی فرایندمحوری در آموزش کار آمد است ».

وایت (۲۰۱۲) ارزشیابی را به‌عنوان موتور محرکه‌ی یادگیری قلمداد کرده‌است و می‌گوید اگر ارزشیابی خوب طراحی شده باشد، قادر خواهد بود انتظارات روشنی را تنظیم کند و بار کاری معقولی را وضع کند و به‌یادگیرندگان فرصت پایش کار خود، تمرین و دریافت بازخورد را خواهد داد. در حالی‌که اگر ارزشیابی، نقشه و طراحی ضعیفی داشته باشد ممکن است مانع یادگیری شود. بنابراین دانستن درباره سواد ارزشیابی و مولفه‌های آن از اهمیت بالایی برخوردار است. افرینبار (۲۰۰۸) به تفصیل درباره اجزای تشکیل دهنده سواد ارزشیابی بحث می‌کند و معتقد است که سواد ارزشیابی چیزی فراتر از تکنیک‌ها، رویه‌ها و مهارت‌های مجزای ارزشیابی است. او بین آزمون یا امتحان و ارزشیابی تفاوت قائل می‌شود و حتی می‌گوید که‌اکثر معلمان معاصر هنوز در عصر آزمون و امتحان هستند و از پذیرفتن شرایط عصر ارزشیابی امتناع می‌کنند. افرینبار با رجوع به نظریه‌اجتماعی فرهنگی ویگوتسکی می‌گوید که به منظور ارتقاء سواد ارزشیابی معلمان هرگز کافی نیست که فقط به آنها تکنیک‌های آزمون‌سازی و طرح سوال را آموزش دهیم، بلکه باید شرایط و موقعیت‌هایی فراهم شود که معلمان بتوانند جهان‌بینی و نگرش خود نسبت به دانش و یادگیری را تغییر دهند. بنابر نظر ویگوتسکی هیچ‌گونه یادگیری به‌صورت منفرد و مجزا از محیط و انگیزش فیزیکی و فرهنگی و اجتماعی اتفاق نمی‌افتد، بنابراین معلمان باید در یک فضای مناسب فیزیکی، فرهنگی و اجتماعی قرار گیرند تا شیوه‌های صحیح ارزشیابی را یاد بگیرند.

ارزشیابی اصولاً با آزمون و امتحان گرفتن متفاوت است. میشل (۱۹۹۲) به نقل از لاو و اکس (۱۹۹۵) امتحان را به‌عنوان یک رویه تک موقعیتی و یک بعدی زمان‌دار در کلاس تعریف می‌کند که معمولاً به‌صورت چندگزینه‌ای یا کوتاه پاسخ است. لاو و اکس (۱۹۹۵) بیان می‌دارند در حالی‌که امتحان اغلب صوری و استاندارد است ولی ارزشیابی مبتنی بر مجموعه‌ای از اطلاعات درباره چیزهایی است که دانش‌آموزان می‌دانند و می‌توانند انجام دهند. به عبارت دیگر در امتحان دانش‌آموزان با رویه‌های دقیق و استانداردی از لحاظ برگزاری و نمره‌دهی آزمون مواجهند ولی در ارزشیابی، شیوه‌ها و روش‌های چندگانه‌ای برای جمع آوری اطلاعات در زمان‌ها و بافت‌های مختلف وجود دارد.

آزمون‌های سنتی معمولاً ابزارهای نتیجه‌محور هستند . برخی از پر کاربردترین ابزارهای آزمون‌های سنتی، آزمون‌های چند گزینه‌ای، تشریحی، صحیح و غلط و کوتاه پاسخ هستند.

ابزارهای صحیح/غلط : در ابزارهای صحیحح و غلط دانش‌آموزان یک پاسخ صحیح را انتخاب می‌کنند برگزاری و تصحیح چنین امتحاناتی راحت است. در این امتحانات احتمال انتخاب تصادفی جواب صحیح

۵۰ابزارهای چند گزینه‌ای: چنین ابزارهایی معمولاً از سوی مدرسان مدارس و موسسات آزمون‌سازی به دلایل زیر استفاده می‌شود: (بیلی، ۱۹۹۸) .

۱- تصحیح آنها آسان و سریع می‌باشد و قابل تصحیح توسط رایانه می‌باشند.

۲- نمره‌دهی آنها عینی است و ظاهر امتحان منصفانه‌تر و قابل اعتمادتر از آزمون‌هایی است که به‌صورت انتزاعی تصحیح می‌شوند.

۳- ظاهر امتحان را دارند و عرف آنها را به‌عنوان امتحان می‌پذیرد.

۴- در مقایسه با آزمون‌های صحیح و غلط احتمال انتخاب جواب صحیح را کمتر می‌کند (مثلاً چهارگزینه‌ای احتمال انتخاب جواب صحیح ۰/۲۵ و سه‌گزینه‌ای احتمال انتخاب جواب صحیح ۰/۳۳ می‌باشد در حالی که در صحیح و غلط این احتمال ۰/۵ می‌باشد). سیمون سون و همکاران (۲۰۰۰) معتقدند که هنگام سنجش مهارت‌های شناختی طراحی آزمون‌های چندگزینه‌ای وقت‌گیرتر است، زیرا طراحی آزمون‌های چندگزینه‌ای که قادر به سنجش استفاده دانش‌آموزان از مهارت‌های بالاتر تفکر مانند تجزبه و تحلیل دشوارتر است .

هاگس به نقل از بیلی (۱۹۹۸) از آزمون‌های چندگزینه‌ای به دلایلی زیر انتقاد می‌کند.

۱- این تکنیک فقط قوه‌ی تشخیصی را امتحان می‌کند .

۲- جواب حدسی ممکن است تاثیر قابل ملاحظه ولی ناشناخته‌ای بر نمره‌ی آزمون داشته باشد.

۳- این تکنیک امتحان را به شدت محدود می‌کند.

۴- نوشتن سوالات خوب و موفق با آن مشکل است.

۵- امکان تقلب در آن راحت است.

۳. انواع ارزشیابی پیشرفت تحصیلی

۱.۳. **ارزشیابی آغازین (ارزشیابی ورودی، پیش از آزمون).** منظور از این ارزشیابی، ارزشیابی قبل از آموزش است. در این ارزشیابی با توجه به نظریه پیش سازمانده‌های آزوبل، که باید دانش‌آموز پیش‌نیازهای مربوطه را بلد باشد، معلم از دانش‌آموزا سوال می‌پرسد، اگر دانش‌آموزان بلد باشند، نقطه‌ی شروع تدریس از همین‌جا آغاز می‌شود ولی اگر بلد نباشند، معلم باید به عقب برگردد و آنها را یادآوری کند. ارزشیابی آغازین اطلاعاتی را در اختیار معلم قرار می‌دهد که به وسیله آن برنامه‌ریزی درسی و هدایت آموزشی دانش‌آموزان بهتر انجام می‌شود. شناخت سطوح متفاوت پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان و میزان آمادگی آنها برای یادگیری از نتایج این نوع ارزشیابی است. علاوه بر این تشخیص تصورات اشتباه یادگیرندگان و خطاها و بدفهمی‌ها نیز امکان‌پذیر می‌شود.

۲.۳. **ارزشیابی تکوینی(ارزشیابی حین آموزش).** ارزشیابی تکوینی یا مستمر توجه پژوهشگران را طی دو دهه گذشته به خود جلب کرده است . ارزشیابی تکوینی نوع دیگری از ارزشیابی است که در حین آموزش و به منظور کمک به اصلاح آموزش انجام می‌شود. اسکریون (۱۹۹۱) ارزشیابی تکوینی را یک تلاش سنجشی می‌داند که پیش از اتمام آموزش و به منظور اصلاح آن انجام می‌شود. این ارزشیابی برای داوری در مورد ارزش

برنامه در حال اجرا مورد استفاده قرار می‌گیرد.
ویلیام (۲۰۱۳) معتقد است که « بدیهی است که این ایده که‌ارزشیابی می‌تواند به یادگیری کمک کند، ایده‌ی جدیدی نیست ولی آنچه که جدید است شواهد زیادی است که دلالت بر آن دارد که ارزشیابی تکوینی یا ارزشیابی برای یادگیری یکی از قوی‌ترین راه‌ها جهت بهبود پیشرفت دانش‌آموزان است » . جالب است بدانید، ویلیام معتقد است که اصطلاح تکوینی در اینجا به خود ارزشیابی برنمی‌گردد بلکه به کارکردی مربوط می‌شود که این ارزشیابی در عمل به‌وجود می‌آورد. یعنی به‌یادگیری دانش‌آموز شکل می‌دهد و آن را تکمیل می‌کند.
پژوهشگران ارزشیابی تکوینی را به‌عنوان ابزاری به‌شمار می‌آورند که به فرایند یاددهی یادگیری کمک می‌کند، نه ابزاری که صرفاً یک نتیجه یا فرآورده را مورد سنجش قرار می‌دهد . بیگز (۱۹۹۸) معتقد است که ارزشیابی تجمعی یا پایانی نیز جایگاه مهمی در ارزشیابی کلاسی دارد و باید به‌عنوان بخشی از ارزشیابی جامع در نظر گرفته شود . کالینگهام (۲۰۰۸) معتقد است که« ارزشیابی کلاسی هم ارزشیابی برای یادگیری و هم ارزشیابی به‌عنوان یادگیری بر گفت‌وگوی معلم و دانش‌آموز استوار است» .
گینزبورگ (۲۰۰۹) بیان می‌دارد که ارزشیابی باید برای کسب اطلاعاتی استفاده شود که می‌تواند به معلم کمک کند که آموزش موثر به‌ویژه برای فرد را طراحی کند.
ریوز (۲۰۰۰) سه استراتژی اصلی برای ارزشیابی در محیط‌های یادگیری آنلاین پیشنهاد می‌کند.
۱- ارزشیابی شناختی که دانش فرد را می‌سنجد.
۲- ارزشیابی عملکردی که عملکرد فرد را می‌سنجشد.
۳- ارزشیابی پوشه‌ای که پرونده فرد را با ثبت فعالیت‌هایش می‌سنجد.

۳.۳. **ارزشیابی تجمعی یا تراکمی(ارزشیابی پایانی، پس از آزمون).** این ارزشیابی برعکس ارزشیابی تکوینی است و هدف از آن جمع آوری اطلاعات برای بهبود تدریس نیست. بلکه یک قضاوت نهایی درباره عملکرد و یادگیری دانش‌آموز در پایان دوره می‌باشد (ارزشیابی، پایان مرحله قضاوت است). در ارزشیابی تراکمی هدف از گردآوری اطلاعات، داوری ارزشی درباره پیامدها و نتایج یک برنامه یا دوره آموزشی است، ولی در ارزشیابی تکوینی، هدف از گردآوری اطلاعات، اصلاح آموزش در حال اجراست. به عبارت دیگر اهداف ارزشیابی تراکمی در پایان دوره‌ی آموزشی، ارزشیابی آموخته‌های یادگیرندگان، نمره دادن و تصمیم‌گیری در مورد رد یا قبول شدن یادگیرندگان و نیز ارزشیابی اثربخشی برنامه آموزشی و شیوه تدریس مدرس است.
اسکروین (۱۹۹۱) ارزشیابی تجمعی را یک تلاش برای سنجش، قبل از پایان روند تدریس می‌داند تا به کمک آن بتوان تدریس را بهبود بخشند. (یعنی ارزشیابی را به‌عنوان حلقه‌ی آخر تدریس در نظر نگیریم)

۴.۳. **ارزشیابی تشخیصی.** این ارزشیابی در طول فرایند تدریس انجام می‌شود و هدف از آن سنجش و تشخیص مهارت‌های دانش‌آموزان و مشکلات یادگیری آنهاست و هنگامی انجام می‌شود که معلم با یک مساله آموزشی جدی مواجه شده‌است.
این ارزشیابی نیز در حین آموزش انجام می‌شود. این ارزشیابی به بررسی، اندازه‌گیری و تشخیص مشکلات یادگیری و اشکالات مهارتی موجود دانش‌آموزان می‌پردازد. استفاده‌از این نوع ارزشیابی هنگامی مورد توجه قرار می‌گیرد که معلم احساس کند با مشکلی عمیق و شدید مواجه شده‌است. انجام این نوع ارزشیابی به معلم کمک خواهد کرد تا علل نارسایی و مشکل موجود را تشخیص داده و با استفاده‌از نتایج بدست آمده و اتخاذ راهکار مناسب برنامه‌ای در جهت رفع مشکل و ارتقای عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان طراحی نماید. این نوع ارزشیابی به ارزشیابی تکوینی شبیه است با این تفاوت که در ارزشیابی تکوینی به مشکلات خفیف یادگیری پرداخته می‌شود اما در ارزشیابی تشخیصی مشکلات حاد مورد توجه قرار می‌گیرد.

۴. ارزشیابی فرایند محور در مقابل ارزشیابی فرآورده‌محور (نتیجه‌محور)

در روش ارزشیابی فرایندمحور دانش‌آموزان باید راهنمایی شوند تا حسی از یادگیری با کیفیت در آنها پدید آید. رویس سدلر (۱۹۸۹) معتقد است که این حس پیش‌شرط مهمی برای یادگیری است.
شرایبر و همکاران (۲۰۱۶) مقایسه‌ی زیر را بین روش‌های ارزشیابی فرایندمحور و فرآورده‌محور انجام داده‌اند.
در ارزشیابی با مقیاس بزرگ نمره‌دهی به مهارت‌های تجربی دانش‌آموزان معمولاً مبتنی بر نتیجه‌ی آزمون‌هاست ولی در رویکرد فرایندمحور کیفیت اعمال دانش‌آموز مد نظر قرار می‌گیرد. تحلیل‌های فرایندمحور زمان‌بر

هستند.
شریفی (۲۰۰۴) می‌گوید که در دیدگاه‌های نوین تدریس برنامه درسی و ارزشیابی عناصر در هم تنیده آموزش به‌شمار می‌آورند.
لافرانسویس (۱۹۹۱) در الگوی سه مرحله‌ای تدریس خود جایگاه‌ارزشیابی و ارتباط آن با فرایند تدریس را چنین بیان می‌کند.
الف) مرحله پیش از تدریس که شامل تعیین اهداف آموزشی ، تعیین سطح دانش‌آموزان و انتخاب روش‌های مناسب تدریس می‌شود.
ب) مرحله ضمن تدریس که بر پدید آوردن تجربیات مناسب یادگیری برای دانش‌آموزان و نظارت بر فعالیت‌های آنها و شناسایی نقاط قوت و ضعف آنها و اتخاذ روش‌های تدریس مناسب با نیازهای آنها، ارائه‌ی بازخورد و تشویق و انگیزش مستمر برای یادگیری تاکید می‌کند.
ج) مرحله پس از تدریس که مبتنی بر سنجش و توصیف میزان موفقیت در نیل به‌اهداف آموزشی، ارائه‌ی بازخورد در مورد نقاط ضعف و قوت دانش‌آموزان به آنها و والدینشان و سنجش کارآمدی روش‌های تدریس و تصمیم‌گیری برای آینده می‌باشد.
رامسدن (۱۹۹۸) معتقد است که‌این روش تدریس و امتحان گرفتن معلم است که تعیین می‌کند دانش‌آموز چه چیزی یاد بگیرد و چگونه‌یاد بگیرد. یعنی معلم چگونه سوال بپرسد که یادگیری تقویت شود.
التون به نقل از رستگار (۲۰۰۳) می‌گوید که اگر می‌خواهید یک نظام آموزشی را اصلاح کنید، اول باید روش‌های ارزشیابی آن را اصلاح کنید.
مهر محمدی (۲۰۰۰) معتقد است که در مقایسه‌ی رویکردهای ارزشیابی فرایندمحور و نتیجه‌محور باید به اهداف آموزشی و روش‌ها و برنامه‌ها توجه شود.
جدول (۱) مقایسه‌ای بین ارزشیابی بی نتیجه‌محور (رویکرد رفتارگرا) و فرایندمحور (رویکرد شناخت گرا) به عمل می‌آورد (مهر محمدی ۲۰۰۰)

ارزشیابی نتیجه محور	ارزشیابی فرایند محور
۱- حالت پایانی دارد (سنجش رفتارهای قابل مشاهده مورد نظر است).	۱- حالت مستمر و تکوینی دارد (شکل‌دهی به یاددهی و یادگیری مورد نظر است).
۲- ابزارهای آن عینی و قلم و کاغذی هستند.	۲- ابزارهای آن قلم و کاغذی، آزمون‌های عملکردی، چک لیست، گزارش‌نویسی و ... هستند.
۳- امتحان شکل رسمی به خود می‌گیرد بنابراین ممکن است ایجاد استرس کند.	۳- امتحان غیررسمی است و فضای آن طبیعی است و استرس را به اشتیاق تبدیل می‌کند.
۴- نقاط قوت و ضعف دانش‌آموز را شناسایی نمی‌کند.	۴- نقاط قوت و ضعف دانش‌آموز را شناسایی می‌کند.
۵- فرایند تفکرو فعالیت دانش‌آموز را نمی‌سنجد.	۵- فرایند تفکر و فعالیت دانش‌آموز را می‌سنجد.
۶- تنها بر فرآورده‌ی نهایی و نتایج عددی یادگیری متمرکز است.	۶- فرایند یادگیری را به حساب می‌آورد.
۷- ارزشیابی به عنوان پروسه‌ای جدا از تدریس محسوب می‌شود.	۷- ارزشیابی به عنوان بخش لاینفکی از تدریس محسوب می‌شود.
۸-کمک زیادی به تصحیح یادگیری دانش‌آموزان نمی‌کند.	۸- به تصحیح یادگیری دانش آموزان کمک زیادی می‌کند.
۹- تفاوت‌های فردی را لحاظ نمی کند.	۹- دانش‌آموزان را فعال می‌کند.
۱۰- به فعالسازی دانش‌آموزان کمک نمی‌کند.	۱۰- دانش‌آموزان را فعال می‌کند.
۱۱- قادر به سنجش اکثر رفتارهای دانش‌آموز نیست.	۱۱- قادر به سنجش اکثر رفتارهای خلق شده است.
۱۲- رفتارهای مرتبه ی بالای یادگیری را اغلب مورد سنجش قرار نمی‌دهد.	۱۲- یادگیری از دانش به کاربرد را ترویج می‌دهد و آن را می‌سنجد.
۱۳- یادگیری را تقویت می‌کند.	۱۳- کاربرد یادگیری و مهارت‌ها در زندگی را تقویت می‌کند.
۱۴- حافظه را تقویت می‌کند.	۱۴- حافظه و حواس پنج‌گانه را تقویت می‌کند (یعنی ما اطلاعات را از طریق پنج حس شنوایی، بینایی، بویایی، چشایی ، لامسه درک می‌کنیم)

جدول (۱) : مقایسه ارزشیابی فرایند محور و ارزشیابی نتیجه مجور

چهارچوب نظری تحلیل داده‌های مطالعه اخیر براساس ارزشیابی برای یادگیری است که مفهومی است که توجه محققان را در دهه‌های اخیر به خود جلب کرده است. گاوین وهمکاران (۲۰۱۵)معتقدند که جنبش‌های اصلاح روش آموزش معاصر می‌کوشند تا پیامدهای منفی ارزشیابی آموزشی به شدت گزینشی را کاهش دهند و بر بهبود یادگیری و تدریس ازطریق مشارکت فعال یادگیرندگان در فرایندها تاکید می‌کنند.
گینزبورگ(۲۰۰۹) بر سنجش تفکر دانش‌آموزان یا به قول او بر سنجش ذهن کودک تمرکز می‌کند. او بیان می‌کند که تفکر یا دانش به فرایندهای شناختی برمی‌گردد که اساس سنجش عملکرد آشکار کودک را تشکیل می‌دهند. وقتی بخواهیم بدانیم که چرا یک دانش‌آموز مشکلی دارد، معلم باید جواب را در تحلیل نقطه ضعف‌های موجود در تفکر کودک جستجو کند.

۵. طرح تحقیق

پژوهش حاضر از یک طراحی تحقیقی نیمه‌کیفی برخودار است، درتحقیق نیمه‌کیفی از ترکیبی از طراحی‌های کیفی و کمی استفاده می‌شود ولی تاکید بر طراحی کیفی توضیحی است. طراحی تحقیق کمی مبتنی بر تحلیل اعداد و ارقامی است که در تحقیق بدست می‌آیند ولی در طراحی کیفی ماهیت کار عمدتاً توضیحی است و هدف از اجرای آن، بدست آوردن درکی از دلایل اساسی، عقاید، نگرش‌ها و انگیزشی می‌باشد که با یک پدیده مرتبط است. این تحقیق بینشی درباره مساله می‌دهد یا به تدوین فرضیه برای پژوهش کیفی کمک می‌کند. یکی دیگر از دلایل تحقیق کیفی، کشف روندهای موجود در تفکر و اظهارنظر و تعمق بیشتر در مورد مساله است. روش‌های جمع‌آوری داده‌های کیفی متنوع است که از تکنیک‌های بدون ساختار یا نیمه‌ساختاری استفاده می‌شود. برخی از روش‌های عمده‌ی آن بحث‌های گروهی، مصاحبه‌های فردی، مشاهده و مشارکت می‌باشند. اندازه‌ی نمونه در این نوع تحقیق معمولاً کم است. شرکت‌کنندگان جامعه تحقیق ۸۰ دانش‌آموز پسر بودند که در دبیرستان‌های شهرستان در سال های ۱۳۹۹-۱۳۹۸ هندسه می‌خواندند. از آنها خواسته شد اگر عملکرد ضعیفی در هندسه دارند یا در امتحان هندسه دچار اضطراب و استرس می‌شوند، می‌توانند در این پروژه شرکت کنند. ۳۵ دانش‌آموز برای شرکت در این تحقیق داوطلب شدند که یک نمونه‌ی ۱۵ نفری از آنها به‌صورت تصادفی انتخاب شدند و سن شرکت کنندگان بین ۱۵تا ۱۶ سال بود.
آنها به‌صورت یک هفته در میان در شش جلسه نود دقیقه‌ای شرکت کردند، بنابراین پروژه ۸۴ روز به طول انجامید، هر روش ارزشیابی در دو جلسه اعمال شد و در هر جلسه روی دو روش ارزش‌یابی کار شد. هیچ جلسه‌ی آموزشی جداگانه‌ای وجود نداشت، در واقع آموزش به‌عنوان بخشی ازجلسات ارزشیابی لحاظ شده بود.

۶. جمع‌آوری و تحلیل داده‌ها

داده‌های تحقیق از چند روش جمع آوری شد که یکی از آنها مشاهده بود، در هر جلسه محقق نکاتی درباره‌ی طیف متنوعی از موضوعاتی که درکلاس مشاهده می‌کرد یادداشت می‌نمود، مثلاً عکس‌العمل‌های شرکت‌کنندگان، مشارکت فعال، نگرش‌ها و سوءتفاهم‌ها بود. منبع دیگر، جمع آوری داده‌ها مصاحبه‌های شفاهی یا کتبی بود که در آن دانش‌آموزان به سوالاتی که محقق می‌پرسید جواب می‌دادند. منبع سوم، عملکرد شرکت کنندگان در آزمون‌های هر جلسه بود و منبع چهارم، جمع آوری داده‌ها و گزارش‌های هفتگی بود که هر هفته سر گروه تحویل می‌داد.

۱.۶. **روش اجرای تحقیق.** هر هفته یک آزمون هندسه برای دانش‌آموزان برگزار می‌شد که زمان آن ۳۰ دقیقه بود. معلم آنها را تصحیح می‌کرد و سعی می‌کرد ازنتایج آنها جهت ارزش‌یابی برای یادگیری استفاده کنند. بعد از هر امتحان خطاهای عمده دانش‌آموزان در فضای دوستانه برای او توضیح داده می‌شد. فرایند ارایه‌ی بازخورد به دانش‌آموزان کمک می‌کرد که سوء برداشت‌های خود از یادگیری هندسه را کشف کنند.
در فرایند تصحیح و توضیح خطاها نام دانش‌آموز ذکر نمی‌شد، بلکه به‌صورت کلی در کلاس بیان می‌شد تا دانش‌آموزان احساس اضطراب نداشته باشند. معلم جواب سوالات دانش‌آموزان را جهت روشن‌سازی بهتر با حوصله و آرامش می‌داد و اگر دانش‌آموزان پیشنهادی می‌دادند، معلم از آن پیشنهاد استقبال می‌کرد و نقاط ضعف وقوت آن پیشنهاد را به روش دوستانه‌ای توضیح می‌داد. معلم در کلاس هندسه ۲ که درباره چندضلعی‌ها، انواع مختلف مثلث‌ها، انطباق‌ها و ویژگی‌های اشکال فضایی، ضمن تدریس از دانش‌آموزان نیز سوال می‌کرد و

ارزش‌یابی را به بعد از تدریس موکول نمی‌کرد که این امر مشکلات و سوء برداشت‌های آنها را به حداقل می‌رساند. همچنین از آنجا که در درس هندسه اصطلاحات هندسی دشواری وجود دارد که ممکن است دانش‌آموزان آن را درک نکنند، درباره‌ی آن اصطلاحات توضیحات مفید و روشنی ارایه می‌داد. در پژوهش حاضر سعی شده است عوامل ترس و اضطراب دانش‌آموزان و موانع یادگیری و سوء برداشت آنها شناسایی شود و ازطریق برنامه‌ریزی و اقدام مناسب این مشکلات حل شوند. در این رویکرد ارزشیابی صرفاً به امتحانات پایانی موکول نمی‌شود، بلکه در هر جلسه به شیوه‌های مختلفی انجام می‌شود. برخی از مشکلات شناسایی شده عبارتند از: فقدان آمادگی توسط دانش‌آموزان بر مفاهیم و مباحث، اضطراب برای امتحان، عدم اعتماد به نفس، تردید در دادن جواب به سوالات، عدم وجود یک محیط انعطاف‌پذیر وخوشایند برای امتحانات، نگرانی درباره نتایج و نمرات پایین.
یکی از روش‌های دیگر برای تصحیح خطاهای دانش‌آموزان بعد از ارزش‌یابی تصحیح خطاها از سوی خود همکلاسی‌های آنها بود. نیکول(۲۰۰۸) در این زمینه می‌گوید یکی ازجنبه‌های مثبت فرایند بازخورد دانش‌آموزان این است که کار همدیگر راملاحظه می‌کنند و این امر می‌تواند درک آنها از اهداف یادگیری را تعمیق بخشد. درجدول شماره (۲) نمونه‌ای ازگزارش‌های هفتگی سرگروهها که به محقق تحویل داده می‌شد را ملاحظه می‌کنید.

تاریخ	وضعیت تکلیف	ثبت نمرات هفتگی	ملاحظات	
سرگروه				
عضوگروه				
عضوگروه				

جدول (۲) : ثبت فعالیتهای گروهها

از آنجا که با انجام آزمون ارزشیابی کلاسی عملکرد کلاس در درس هندسه خیلی پایین بود، امتحان اول به‌صورت فردی و گروهی برگزار شد تا از اضطراب دانش‌آموزان در خصوص امتحان کاسته شود. . سپس سه سوال داده می‌شد و دانش‌آموزان آنها را در زمان مشخص جواب می‌دادند، پس از آن به هر دانش‌آموز یک سوال داده می‌شد تا آن را جواب دهد. روش تصحیح امتحان طبق روش زیر بود. از آنجا که گروه‌های سه نفری بودند، نمره فردی را سه برابر کرده و با نمره گروهی جمع و سپس بر دو تقسیم کردیم.در اجرای این عمل نظارت مستقیم معلم ضروری است. او باید بر مشارکت همه اعضای گروه تاکید کند به‌طوری‌که هیچ کس در گروه منفعل یا غیرفعال نماند.
سوالات ارزشیابی شامل انواع مختلفی از ارزشیابی‌ها بودند و در برخی از سوالات نیز قسمتی از جواب نوشته می‌شد تا دانش‌آموز بقیه اثبات یا راه حل را به یاد آورد و دربرخی دیگر از سوالات نیز جواب را نوشته و اشتباهی در جواب وجود داشت که از دانش‌آموزان خواسته شد تا این اشباه را پیدا کنند و این قسمت برای دانش‌آموزان بسیار لذت بخش بود.

۲.۶ . **نتایج و یافته‌ها.** جدول (۳) نتایج روش ارزشیابی فرایندمحور را در ارتقاء یادگیری دانش‌آموزان و تمایل به یادگیری و کاهش اضطراب آنها در مورد امتحانات هندسه و فاکتورهایی از این قبیل را نشان می‌دهد.

اهداف تحقیق / تعداد	پیشرفت در حل مساله	طرزفکر ریاضی	کاهش استرس و اضطراب	بهبود اعتماد به نفس	رضایت از پروژه
تعداد موفقیت‌های شرکت‌کنندگان	۱۱	۱۰	۹	۱۱	۱۵
تعداد کل	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵
درصد موفقیت	٪۷۳/۳۳	٪۶۶/۶۶	٪۶۰	٪۷۳/۳۳	٪۱۰۰

جدول (۳) : نتایج برگزاری روش های ارزشیابی فرایند محورشرکت کنندگان

همانگونه که در جدول (۳) می‌بینید، از ۱۵ شرکت‌کننده در پروژه تحقیق، ۱۱ نفر شاهد بهبود چشمگیری درباره‌ی تجربه حل مساله هندسی خود شدند که برابر ۷۳/۳۳ نمونه‌ی تحقیق است.
همچنین طرز فکر ۱۰ شرکت کننده تغییر زیادی پیدا کرد، که این امر از طریق تحلیل مصاحبه‌های شخصی آنها در حل مسائل تخصصی، ارتقاء رضایت بخش آنها در دو جلسه‌ی قبل و گزارش‌های هفتگی مشهود بود.
بدین‌ترتیب ۶۶/۶۶ درصد شرکت‌کنندگان تغییر موفقی در طرز فکر ریاضی خود در مورد هندسه بدست آوردند، ولی ۵ شرکت‌کننده‌ی دیگر تغییر آنها جزئی و غیررضایت‌بخش بود.
در جدول (۴) پاسخ‌های مصاحبه‌ی محقق با شرکت‌کنندگان در مورد اضطراب و استرس در امتحان هندسه آمده است.

دانش‌آموز۱: در ابتدا شرکت در امتحان هندسه برای من یک فکر شوکه کننده بود ولی اکنون از هندسه لذت می برم.
دانش‌آموز ۲: من کلاً در امتحان هندسه احساس راحتی می‌کنم.
دانش‌آموز ۳: من کلاً در امتحان هندسه احساس نگرانی می‌کنم و تجربه وحشتناکی برای من است.
دانش‌آموز ۴: مسلماً پیشرفت زیادی حاصل کرده‌ام.
دانش‌آموز ۵: اکنون از هندسه کمتر می‌ترسم ولی هنوز با آن راحت نیستم.
دانش‌آموز ۶ : شرکت در کلاس‌های شما به من کمک کرد تا نسبت به ترس از هندسه غلبه کنم.
دانش‌آموز ۷ : صادقانه بگویم، من همچنان از امتحان هندسه متنفرم ولی دیدگاهم درباره‌ی شرکت درکلاس هندسه بهتر شده است.
دانش‌آموز ۸ : من موفق شدم ترسم از هندسه را باعلاقه برای یادگیری ان جایگزین کنم.
دانش‌آموز ۹ : حالا بهتر از گذشته هستم ولی هنوز خیلی نگران نمرات درس هندسه هستم.
دانش‌آموز ۱۰: ازاینکه به من کمک کردید بر ترس از هندسه غلبه کنم متشکرم و باگذشته‌ی خود قابل مقایسه نیستم.
دانش‌آموز ۱۱: متاسفانه من بهبود کمی در این زمینه حاصل کرده‌ام.
دانش‌آموز ۱۲: تجربه‌ی هیجان‌انگیزی بود امیدوارم بقیه هم در چنین کلاس‌هایی شرکت کنند.
دانش‌آموز ۱۳ : اکنون می‌توان گفت خوبم.
دانش‌آموز ۱۴: نمی‌گویم که همه مشکلاتم در پایان این دوره حل شده است، برخی از آنها همچنان پابرجاست ولی نگران نیستم زیرا به توانایی خود در مورد هندسه باور کرده‌ام.
دانش‌آموز ۱۵ : متشکرم من به این نتیجه رسیدم که یادگیری هندسه آسان‌تر از آن چیزی است که فکر می‌کردم .

جدول (۴) : پاسخ شرکت کنندگان به سوال درباره‌ی استرس و اضطراب آنها در مورد هندسه در مصاحبه‌ی پایانی پروژه

همان‌گونه که در جدول (۴) می‌بینیم، ۹ شرکت‌کننده گفته‌اند که هیچ اضطراب و استرسی در جلسه‌ی پایانی هندسه نداشته‌اند ولی قبلاً هندسه برای آنها ترسناک بوده است که این امر موجب کاهش انگیزه‌ی یادگیری و مشارکت فعال در کلاس‌های هندسه می‌شده است. آنها این تغییر مثبت خود را قویاً مربوط به شرکت در پروژه‌ی تحقیقی ما می‌دانستند.
۶ شرکت کننده (۴۰ درصد) می‌گفتند که همچنان اضطراب و استرس قابل ملاحظه‌ای در امتحان هندسه دارند ولی نسبت به گذشته بهتر شده‌اند.
۱۱ شرکت کننده تاکیده کرده‌اند که اعتماد به نفس آنها در هندسه به‌طور قابل ملاحظه‌ای تقویت شده است که این تعداد ۷۳/۳۳ نمونه‌ی تحقیق را تشکیل می‌دهند.
آنها گفته‌اند که شیوه برگزاری امتحانات و کمک محققان و ارتقای یادگیری به آنها حس اعتماد به نفس جهت حل مسائل هندسی را داده است. مشاهدات محققان از شرکت‌کنندگان در جلسه‌ی آخر تحقیق نیز داده‌های بدست آمده در مصاحبه‌ها را تایید می‌کند. در نتیجه‌ی این تعاملات همه‌ی شرکت‌کنندگان به این درک رسیده بودند که سبک‌های مختلفی برای استدلال یادگیری و ارزشیابی وجود دارد. همه‌ی شرکت‌کنندگان (۱۵ نفر) حاضر بودند در پروژه‌های تحقیقی مشابه شرکت کنند. زیرا آنها این تحقیق را تجربه‌ای متفاوت از لحاظ یادگیری و امتحان یافته‌اند .

۷. بحث ونتیجه‌گیری

روش‌های ارزش‌یابی سنتی در مدارس معمولاً جهت ارائه یک قضاوت کمی در مورد عملکرد دانش‌آموزان صورت می‌گیرد و برای تصحیح اشتباهات دانش‌آموزان، تقویت اعتماد به نفس و ارتقای انگیزه‌ی آنها جهت یادگیری کاری انجام نمی‌دهند یا تاثیری بسیارجزئی دارند. این روش‌ها نمرات امتحان را محصول و نتیجه‌ی نهایی فرایند یاددهی و یادگیری به شمار می‌آورند و در واقع آنها روش‌های ارزشیابی نتیجه‌محور هستند ولی در روش‌های ارزشیابی جدید که فرایندمحور هستند، ارزشیابی بخش لاینفکی از فرایند یاددهی ویادگیری به شمار می‌رود وهدف از ارزشیابی ارتقاء یادگیری، تصحیح سوء تفاهم‌ها وتقویت انگیزه و اعتماد به نفس دانش‌آموزان است. در روش‌های ارزشیابی نوین بر مفهوم ارزشیابی درخدمت یادگیری تاکید می‌شود ولی در روش‌های سنتی بر ارزشیابی آموخته‌ها تاکید می‌شود.

در پژوهش حاضر سعی شده است که تاثیر روش‌های ارزشیابی فرایندمحور بر ارتقاء یادگیری دانش‌آموزان بررسی شود. جهت انجام این کار یک نمونه‌ی ۱۵ نفری به‌طور تصادفی از بین ۳۵ دانش‌آموز انتخاب شد، که عملکرد ضعیفی در هندسه داشتند یا از درس هندسه می‌ترسیدند و اضطراب داشتند که پسرانی بودند که هندسه ۲ را در دبیرستان‌های شهرستان شوش می‌خواندند. آنها ۶ جلسه درکلاس ارزشیابی فرایندمحور شرکت کردند. تکنیک جمع آوری داده‌ها عبارت بود از مشاهدات محققان، مصاحبه‌ها، عملکرد دانش‌آموزان در آزمون‌های پروژه و گزارش‌های هفتگی سرگروهها. داده‌ها از لحاظ کارآمدی روش‌های ارزش‌یابی فرایندمحور برای ارتقاء یادگیری، انگیزه مشارکت و اعتماد به نفس دانش‌آموزان مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. تحلیلی از نتایج بدست آمده درذیل ارائه می‌شود.

تجربه حل مسئله هندسی ۱۱ دانش‌آموز بهبود چشم‌گیری پیدا کرد، که این رقم ۷۳/۳۳ درصد نمونه‌ی تحقیق را تشکیل می‌دهد. ۹ دانش‌آموز (۶۰ درصد) گفته‌اند که آنها دیگر استرسی برای نشستن در جلسه امتحان پایانی هندسه ندارند.

۱۰شرکت کننده (۶۶/۶۶ درصد) شاهد تغییر مثبت طرز فکر چشمگیر ریاضی خود در مورد هندسه شدند.

۱۱ شرکت کننده تاکید کرده‌اند که اعتماد به نفس آنها در کلاس هندسه به‌طور قابل ملاحظه‌ای تقویت شده است، که این رقم ۷۳/۳۳ درصد نمونه‌ی تحقیق را تشکیل می‌دهد. این درصد بالا از موفقیت را می‌توان به ارائه بازخورد آموزنده و سازنده به شرکت‌کنندگان در محیطی دوستانه و همیارانه نسبت داد.

ارائه‌ی بازخورد مفید و اصلاحی به دانش‌آموزان پس از تصحیح و نمره‌دهی امتحان بخشی اساسی و لاینفک از فرایند ارزشیابی است که متاسفانه اکثریت قاطع معلمان به‌ویژه معلمان ریاضی این کار را انجام نمی‌دهند. بازخورد مفید و تصحیحی به دانش‌آموزان بدهیم و بگوییم مثلاً این ایراد کلی خیلی از شماست ودلیل آن را توضیح دهیم یا اشکالات انفرادی آنها را توضیح دهیم. جای تاسف بسیار دارد که معلمان این مرحله مثمر ثمر از ارزشیابی و فرایند یاددهی و یادگیری را نادیده می‌گیرند و از کنار آن می‌گذرند.

ارائه بازخورد می‌تواند برداشت‌های اشتباه در یادگیری و محاسبات غلط را به شیوه‌ای موثر تصحیح و برطرف کند. زیرا هنگامی‌که انسان‌ها خطایی می‌کنند مخصوصاً خطایی که بابت آن بهایی بپردازند، مشتاق می‌شوند بیاموزند که خطای خود را چگونه تصحیح کنند تا دفعات بعد مرتکب چنین خطایی نشوند. مثلاً اگر در امتحان نمره‌ای از دست بدهند، در هنگام بازخورد ناراحت می‌شوند که چرا این‌قدر ساده نمره از دست داده‌اند.

این امر می‌تواند درکلاس ریاضی و هندسه بسیار آموزنده باشد. البته موثرترین شیوه برای برطرف کردن برداشت‌های اشتباه دانش‌آموزان، آن است که این تصحیح خطا به‌صورت غیرمستقیم و بدون ذکر نام دانش‌آموز صورت گیرد. محقق فهرستی از خطاها و برداشت‌های اشتباهی را آماده کرد که در برگه امتحان دانش‌آموزان با آن برخورد کرده بود. سپس بدون ذکر نام دانش‌آموز خاصی آنها را برای کل کلاس توضیح می‌داد. بدین‌ترتیب هیچ کس احساس خجالت یا سرزنش نمی‌کرد. در چنین محیطی که عاری از استرس است دانش‌آموزان می‌توانند به ارائه‌ی بازخورد آموزنده معلم به‌طور دقیق توجه کنند و از خطاهای خود به موثرترین وجه ممکن بیاموزند و یاد بگیرند. بنابراین بهتر است بعد از هر آزمون جلسه‌ی مختصری (مثلاً ربع ساعت) برای تصحیح اشتباهات و بازخورد برگزار شود و خطاهای کلی بدون ذکر نام دانش‌آموزان بیان شوند.

مثلاً گفته شود که پنج نفر این خطاها را داشته‌اند و چهار نفر دیگر هم مرتکب این خطاها شده‌اند. زیرا آزمون بدون بازخورد مانند تن بدون سر است و معلمی که با مخاطبینش ارتباط نداشته باشد مانند هواپیمایی است که با

برج مراقبت ارتباط ندارد. کار جمعی در گروههای ۳ نفری نیز به پیشرفت آنها کمک می‌کرد و آنها می‌توانستند در یادگیری خود مشارکت فعال داشته باشند و دانش‌آموزان خود را بسازند و اصلاح کنند. هنگامی‌که دانش‌آموزان به‌طور جمعی در گروه به سوالی جواب می‌دهند، آنها نهایت تلاش خود را انجام می‌دادند تا آموخته‌های خود را به میدان آورند. این رویه همچنین به تنوع فرایند کار می‌افزاید و منجر به کاهش اضطراب می‌شود. این مسئولیت مشترک در ارتقا احساس راحت بودن با هندسه به آنها کمک مفیدوموثری می‌کرد. مثلاً در حل مسئله که کار گروهی ۳ نفری بود، هر کس آموخته‌های قبلی خود را به یاد می‌آورد و پیشنهاد می‌دادند که برای حل آن از این روش یا آن روش حل کنیم.

مراجع

[۱] دلاور، علی، زهراکار، کیانوش، « سنجش و اندازه‌گیری در روان‌شناسی، مشاوره و علوم تربیتی»، نشر ارسباران. چاپ سوم، ۱۳۸۹.

[۲] رستگار، طاهره، « ارزشیابی در خدمت آموزش»، موسسه فرهنگی منادی تربیت، ۱۳۸۲.

[۳] رستگار، ز. مقاله‌الگوهای ارزشیابی، مجموعه مقالات چهاردهمین کنفرانس آموزش ریاضی، ۱۳۹۵.

[۴] شریفی، حسن پاشا ، « سنجش عملکرد در فرآیند یاددهی، یادگیری»، انتشارات پژوهشکده تعلیم و تربیت. مجموعه مقالات همایش ملی مهندسی اصلاحات در آموزش و پرورش، به‌اهتمام منیره رضایی، چاپ اول، ۱۳۸۳.

[۵] فونتانا، د. روانشناسی برای معلمان. ترجمه‌ی مهشید فروغان، تهران: انتشارات ارجمند، ۱۳۸۲.

[۶] مهرمحمدی، محمود، « نظریه‌های برنامه درسی»، انتشارات سمت، ۱۳۷۹.

[7] K. M. Bailey, Learning about language assessment: dilemmas, decisionjs, and directions. Heinle & Heinle: US, 1998.

[8] J. Biggs, Assessment and classroom learning: A role for summative assessment? Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, **5**(1) (1998), 103–11.

[9] G. T. L. Brown,S. K. F. Hui, W. M. Yu,& K. J. Kennedy, (2015). Teachers' conceptions ofassessment in Chinese contexts: A tripartite model of accountability, improvement, and Callingham, R. Dialogue and feedback: Assessment in the primary mathematics classroom. Australian Primary Mathematics Classroom, **13** (3)(2008),18–21.

[10] G. L. Claxton, What kind of learning does selfassessment drive? Developing a "nose" for quality: Comments on Klenowski. Assessment in Education: Principles, Policy, and Practice, **2** (1995), 339–343.

[11] M. A. Clements, & F. N. Ellerton, Mathematics Education Research: Past, Present, and Future. UNESCO Principal Regional Office for Asia and the Pacific: Bangkok, 1996.

[12] A. Constantinou C. (eds) Insights from Research in Science Teaching and Learning. Contributions from Science Education Research, vol 2. Springer, Cham Scriven, M. Evaluation thesaurus. New Bury Park, CA: Sage, 1991.

[13] B. Crisp, Is it worth the effort? How feedback influences students subsequent submission of assessable work. Assessment & Evaluation in Higher Education,**32**(5) (2007), 571-581.

[14] P. H. Ginsburg, The Challenge of Formative Assessment in Mathematics Education: Children's Minds,Teachers' Minds. Human Development, **52**(2009), pp.109-128.

[15] J. Hattie and H. Timperley Review of Educational Research,March, **77** No. 1(2007), pp. 81–112.

[16] M. Heritage, J. Kim, & T. Vendlinski, From evidence to action: A seamless process in formative-assessment? Paper presented at the American Educational Research Association Annual Meeting,New York irrelevance. International Journal of Educational Research,2008.

[17] B. Law, & M. Eckes, (1995). Assessment and ESL. Peguis publishers: Manitoba, Canada. Lefrancois Guy, R. Psychology for Teaching, 1991.

[18] B. Lionheart, (2008) Thoughts on how to choose a place to study for arst degree in Maribor, Slovenia. maths in the U.K. School of Mathematics, University of Manchester, July 30, 2008. Retrieved from www.if.ufrgs.br/tex/fis01043/textos/VDTeodoro1998. pdf on August, 24, 2017.

[19] M. Mohammadi, (2000). Curriculum Theories. Tehran: SAMT Publication modelling in the physical sciences and in mathematics. Invited paper presented at D. Nicol, & S. Draper, Redesigning written feedback to students when class sizes are large. Paper presented at the Improving University Teachers Conference, July, Glasgow, 2008.

[20] J. A. Oluwatayo, Assessing teachers' degreeof emphasis on assessment in senior secondary school chemistry. International Journal of Research in Education, Ghana. **1**(1) (2013), 102—109.

[21] J. Pegg, A. Gutiérrez, & P. Huerta, Assessing reasoning abilities in geometry. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), Perspectives on the teaching of geometry for the 21stcentury (pp. 275-295). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1998.

[22] J. Piaget, The child's conception of the world (J. Tomlinson & A. Tomlinson, transl.), 1976.
[23] P. (ed). Ramsden, Improving Learning: New Perspective. London: Kogan, 1998a.
[24] T. Rastegar, Assessment at the Service of Education. Tehran: Monadiye Tarbiat Cultural Institute, 2003.
[25] T. C. Reeves, Alternative assessment approaches for online learning environments in higher education. Educational Computing Research, **3**(1)(2000), pp. 101-111.
[26] D. R. Sadler, Formative assessment and the design of instructional systems. Instructional Science,**18** (1989), 119–144.
[27] N. Schreiber, H. Theyßen,H. Schecker, Process-Oriented and Product-Oriented Assessment of Experimental Skills in Physics: A Comparison. In: Papadouris N., Hadjigeorgiou, 2016.
[28] M. Scriven, M. Evaluation thesaurus. New Bury Park, CA: Sage. 1991.
[29] Sharifi ." measurement of performance in the teaching-learning process" in . Monireh Rezaie(Ed.) The Proceeds of the International Conference on Reforms Engineering in EducationTehran: Publication of Education Research Center, 2004.
[30] M. Simonson, S. Smaldino, M. Albright, and S. Zvacek, Assessment for distance education (ch 11). Teaching and Learning at a Distance: Foundations of Distance Education. Upper Saddle River, NJ:Prentice-Hall, 2000.
[31] R. J. Stiggins, Classroom assessment for student success. Student assessment series. Annapolis Junction, MD: NEA Professional Library, 1998.
[32] M. Taras, To feedback or not to feedback in student self-assessment. Assessment and Evaluation in Higher Education, **28** (5) (2003), 549-565.
[33] V. D. Teodoro, From formulae to conceptual experiments: interactive the International CoLos Conference New Network-Based Media in Education,Maribor, Slovenia, 1998.
[34] Totowa: Littlefield, Adams & Co. Popham, W. J. Why assessmen t illiteracy is professional suicide. Educational Leadership, **62**(1) (2004), 82-83.
[35] E. White, (2013) Assessment literacy for affective classroom-based assessment . www.linkedIn.com . Retrieved on July, 2017.
[36] D. William, Assessment: The Bridge between Teaching and Learning. Voices from the Middle, (V)21 , 2013, 2 pp. 15-25.

گروه ریاضی، واحد اندیمشک، دانشگاه آزاد اسلامی، اندیمشک، ایران.
آدرس پست الکترونیکی: mrnekoufar@gmail.com

برآوردگرهای نوع فینسلر در پویایی شناختی سلول‌های سرطانی

لیلا سیدحاتمی و مرتضی فغفوری

چکیده. در این تحقیق مدل فینسلری مربوط به سیستم دینامیکی گارنر معرفی شده است که رشد جمعیت سلول‌های سرطانی را مدل‌سازی می‌کند. ساختار فینسلر متناسب با مدل‌های بیولوژیکی ارائه شده نشان داده شده است که می‌تواند رشد کلی جمعیت سلول‌های سرطانی را که به‌دلیل تغییرات قابل توجه در فرآیند سرطان رخ می‌دهد را ارائه دهد. پیشینه هندسی، مزایای کاربردی و مقدمه‌ای از تجسم فضایی ساختار هندسی به‌وجود آمده مورد بحث قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: ساختار فینسلر، متر راندرز، قاب هللند، فضای هیلبرت، نرم مینکوفسکی، سلول سرطانی.

۱. مقدمه

در متن حاضر، شرح تغییرات سلول‌های سرطانی که شامل سه نوع از سلول‌ها است، بسیار حائز اهمیت است [۱]. در حال تکثیر (نامیرا)، ساکن (در حال استراحت) و سلول‌های مرده و فراوانی آن‌ها در پیش‌آگاهی بیماری‌های سرطانی تعیین کننده است. تکامل جمعیت سلول‌های سرطانی ابتدا در سال ۱۹۹۵ توسط سیستم دینامیکی سولیانیک، بر اساس مفروضات زیر، مدل‌سازی شد و از سیستم دیفرانسیلی زیر تبعیت می‌کند

$$\dot{\tilde{x}} = b\tilde{x} - P\tilde{x} + Q\tilde{y}, \quad \dot{\tilde{y}} = -d\tilde{y} + P\tilde{x} - Q\tilde{y}. \tag{۱.۱}$$

که در آن مقدار $\tilde{x}$، سلول‌های در حال تکثیر و مقدار $\tilde{y}$ سلول‌های ساکن، b نرخ تقسیم سلول‌های در حال تکثیر، d نرخ مرگ سلول‌های ساکن، P و Q انتقال سلولی از حالت ساکن به حالت تکثیر و برعکس.

این مدل توسط گارنر و همکاران به‌صورت زیر توسعه یافت [۲، ۳]

$$P = C(\tilde{x} + a\tilde{y}), \quad Q = \bar{A}\tilde{x}/(1 + \bar{B}\tilde{x}^2).$$

که در آن P و Q به‌عنوان وابسته‌های $\tilde{x}$ و $\tilde{y}$، a جذب نسبی مواد مغذی توسط سلول‌های ساکن در مقابل سلول‌های در حال تکثیر، C میزان جابجایی سلول از حالت تکثیر به ساکن، $\bar{A}$ میزان داخلی افزایش Q در $\tilde{x}$ کوچک و $\bar{A/B}$ کاهش Q در $\tilde{x}$ بزرگ را نشان می‌دهد. مدل گارنر تکامل عددی شده جمعیت سلول‌های $x = c/b\tilde{x}$ و $y = Ca/b\tilde{y}$ را توسط سیستم دینامیکی شرح می‌دهد

$$\dot{x} = x - x(x+y) + \frac{hxy}{1+Kx^2}, \quad \dot{y} = -ry + ax(x+y) - \frac{hxy}{1+Kx^2}. \tag{۲.۱}$$

که در آن $r = d/b$ نسبت بین نرخ مرگ سلول‌های ساکن و نرخ تولد سلول‌های در حال تکثیر، $h = \bar{A}/(a/c)$ فاکتور رشدی که سلول‌ها را از حالت ساکن به حالت در حال تکثیر جابه‌جا می‌کند و $K = \bar{B}.(b/c)^2$ اثر تعدیل کننده خفیف را بیان می‌کند.

۲. ساختار فینسلر و تانسورهای وابسته به فضاهای هیلبرت

ساختار فینسلر حقیقی $(\mathcal{M}, F)$ شامل C^∞ حقیقی nبعدی منیفلد $\mathcal{M}$ و نقشه‌ای به‌نام تابع اساسی فینسلر است [۴، ۵، ۶].

تعریف ۱.۲. *یک تابع اسکالر حقیقی $F : T\mathcal{M} \to [0, \infty)$، تابع اساسی فینسلر نامیده می‌شود اگر*

(۱) F *هموار در فضای مماس شکاف‌دار* $T\mathcal{M} \setminus \{0\} = \{(x,y) | x \in \mathcal{M}, y \in T_x\mathcal{M}, y \neq 0\}$ *باشد و روی تصویر قسمت پوچ کلاف مماس* $(T\mathcal{M}, \pi, \mathcal{M})$ *پیوسته باشد.*

رده بندی موضوعی ۲۰۱۰: $53B40$ ؛ $37G75$.

(۲) F *به‌طور مثبت همگن از درجه ۱ باشد، یعنی:*

$$F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y), \quad \forall \lambda > 0,$$

(۳) *نقشه‌های هموار* $g_{ij} : T\mathcal{M} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, i, j \in \overline{1, n}$ *داده شده در*

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j} \tag{۱.۲}$$

از ماتریس معین مثبت متقارن، $[g] = (g_{ij})_{i,j \in \overline{1,n}}$ *و مولفه‌های میدان تانسور متری فینسلر* $g = g_{ij} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$ *هستند.*

در تحقیق حاضر سه نوع ساختار فینسلر را در نظر می‌گیریم: راندرز، اقلیدسی و نوع ریشه چهارم.

$$F_R = \alpha + \beta, \quad \alpha = \sqrt{a_{ij}(x) y^i y^j}, \quad \beta = b_I(x) y^i,$$

$$F_E = \sqrt{a_{ij} y^i y^j}, \quad b_i = 0, \quad a_{ij} = \text{مقدار ثابت},$$

$$F_Q = \sqrt[4]{a_{ijkl}(x) y^i y^j y^k y^l}, \quad a_{ijkl} \text{ مولفه‌های میدان تانسوری } (0,4) \text{ روی } \mathcal{M}.$$

حال می‌بایست روی زیردامنه دوبعدی وابسته به مدل، این سه متر از فرم را معین کنیم:

$$F_R(y) = \sqrt{\delta_{ij} y^i y^j} + b_i y^i = \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2} + b_1 y^1 + b_2 y^2, \tag{۲.۲}$$

$$F_E(y) = \sqrt{C_1 (y^1)^2 + C_2 y^1 y^2 + C_3 (y^2)^2}, \tag{۳.۲}$$

$$F_Q(y) = \sqrt[4]{q_1 (y^1)^4 + q_2 (y^1)^3 y^2 + q_3 (y^1)^2 (y^2)^2 + q_4 y^1 (y^2)^3 + q_5 (y^2)^4}. \tag{۴.۲}$$

رابطه این ویژگی‌ها و خواص مربوط به مدل را با آزمون تانسورهای کارتان و با تخمین جابجایی آن‌ها بررسی می‌کنیم.

جز برای حالت اقلیدسی (۳.۲) که تانسور کارتان مشخصاً صفر است، در حالت راندرز و ریشه چهارم، یک تانسور کارتان پیشرفته ارائه می‌شود، که نرم مربعی فربنیوس تابع اسکالر وابسته به جهت است و توسط انتقال $\|C\|_g^2 = C_{ijk} g^{ir} g^{js} g^{kt} C_{rst}$ بیان می‌شود.

۳. محاسبات ساختارهای فینسلر

۱.۳. سیستم گارنر کاهشی (RS). هنگامی‌که شرایط سیستم گارنر (GS) فراهم نباشد (ممکن است تحت درمان اتفاق بیافتد)، (۲.۱) می‌تواند به‌وسیله RS (سیستم دینامیکی کاهشی) تقریب زده شود، یعنی:

$$\dot{x} = x - x(x + y), \quad \dot{y} = -ry + ax(x + y). \tag{۱.۳}$$

۲.۳. محاسبات نرم‌های فینسلر. نرم اقلیدسی $\|\dot{P}_e\|_E$ به‌دست آمده از بردار نرخ $\dot{P}_e = (\dot{x}_e, \dot{x}_e)$ می‌تواند برای ارزیابی شدت سیر تکاملی بیماری استفاده شود. $\|P_e\|$ با نرم‌های فینسلر $F_R(\dot{x}, \dot{y})$، $F_E(\dot{x}, \dot{y})$ و $F_Q(\dot{x}, \dot{y})$ می‌تواند مینسکوفسکی موضعی ارائه دهد. تقریب ارائه شده نرم فینسلر F $\|\dot{P}_e\|_E \sim F(\dot{x}, \dot{x})$، که $\|.\|_E$ نرم اقلیدسی است.

حال روابط زیر که همان توابع اصل نوع مینکوفسکی موضعی هستند را در نظر می‌گیریم

$$F_R(\dot{x}, \dot{y}) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + b_1 \dot{x} + b_2 \dot{y}, \tag{۲.۳}$$

$$F_E(\dot{x}, \dot{y}) = \sqrt{C_1 \dot{x}^2 + C_2 \dot{x}\dot{y} + C_3 \dot{y}^2}, \tag{۳.۳}$$

$$F_Q(\dot{x}, \dot{y}) = \sqrt[4]{a(\dot{x})^4 + b(\dot{x})^3 (\dot{y} + c(\dot{x})^2 (\dot{y})^2 + d(\dot{x})(\dot{y})^3 + c(\dot{y})^4}. \tag{۴.۳}$$

برای به‌دست آوردن مقادیر $b_{۱,۲}$، $C_{۱,۲,۳}$ و a, b, c, d, e از روش کمترین مربعات استفاده می‌کنیم. از $F(\dot{P})$ در تعریف $F(\dot{x}, \dot{y}) \sim \|\dot{P}_e\|_E$ استفاده می‌کنیم و برای موارد راندرز، اقلیدسی و ریشه چهارم خواهیم داشت

$$b_۱\dot{x}_K + b_۲\dot{y}_y = \sqrt{(\dot{x}_e)^۲_K + (\dot{y}_e)^۲_K} - \sqrt{\dot{x}^۲_K + \dot{y}^۲_k},$$

$$C_۱\dot{x}^۲_K + C_۲\dot{x}_K\dot{y}_K + C_۳\dot{y}^۲_K = (\dot{x}_e)^۲_K + (\dot{y}_e)^۲_K,$$

$$a(\dot{x})^۴_K + b(\dot{x})^۳_K(\dot{y})_K + c(\dot{x})^۲_K(\dot{y})^۲_K + d(\dot{x})_K(\dot{y})^۳_K + e(\dot{y})^۴_K = ((\dot{x}_e)^۲_K + (\dot{y}_e)^۲_K)^۲.$$

روابط راندرز، اقلیدسی و نوع ریشه چهارم متناسب سیستم دینامیکی مدل تعداد سلول‌های سرطانی گارنر (۲.۱) به‌ترتیب به‌صورت زیر خواهند بود

$$F_R(\dot{x}, \dot{y}) \approx \sqrt{\dot{x}^۲ + \dot{y}^۲} + ۰٫۶۳\dot{x} - ۰٫۲۷\dot{y}, \tag{۵.۳}$$

$$F_E(\dot{x}, \dot{y}) \approx \sqrt{۰٫۹۴x^۲ + ۱٫۱۶\dot{x}\dot{y} + ۰٫۵۰\dot{y}^۲},$$

$$F_Q(\dot{x}, \dot{y}) \approx \sqrt[۴]{-۰٫۳۲x^۴ + ۲٫۷۰\dot{x}^۳\dot{y} + ۲٫۴۲\dot{x}^۲\dot{y}^۲ + ۱٫۰۷\dot{x}\dot{y}^۳ + ۰٫۲۵\dot{y}^۴}. \tag{۶.۳}$$

۴. خواص ساختارهای متریک فینسلر به‌وجود آمده

۱.۴. **ساختار نوع راندرز.** برای $\|b\|_y < ۱$ (مورد بحث ما)، g_{ij} معین مثبت و قاب عمودی غیر هولومونیک وجود دارد

$$F_H = \{X_J | X_j = X^i_j \frac{\partial}{\partial y^i}, j = \overline{۱, ۲},$$

که قاب هللند ساختار راندرز نامیده می‌شود [۴].

$$X^i_J = \sqrt{\alpha/F}(\delta^i_j - \frac{y^i(\alpha_j + b_j}{F} + \sqrt{\alpha/F}.\frac{y^i\alpha_j}{\alpha}), \quad j = \overline{۱, ۲}$$

میدان تانسور متری راندرز g_{ij}، $\alpha-$تابع ریمانی و $\alpha_i = \frac{\partial\alpha}{\partial y^i} = \frac{y^i}{\alpha}$ می‌شود لذا نتایج زیر را داریم:

قضیه ۱.۴. *آ) میدان تانسوری متر فینسلر رابطه $g = g_{ij}(\dot{P})\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$ از ساختار راندرز F_R مولفه‌های زیر را دارد*

$$g_{ij}(y) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha}(\delta_{ij} - \frac{y^i y^j}{\alpha^۲}) + \frac{y^i y^j + \alpha(b_i y^j + b_j y^i) + b_i b_j.\alpha^۲}{\alpha^۲}$$

ب) برای ساختار فینسلر (۲.۳) مولفه‌های میدان قاب هللند به‌صورت زیر ارائه شده است.

$$X^i_j = \frac{\alpha F \delta^i_j - y^i(y^j + \alpha b_j)}{\sqrt{\alpha F^۳}} + \frac{y^i y^j}{\alpha F}, \quad j = \overline{۱, ۲}.$$

اثبات. آ) از محاسبه مستقیم نتیجه می‌شود

$$g_{ij}(y) = \frac{F}{\alpha}(\delta_{ij} - \alpha_i\alpha_j) + (\alpha_i + b_i)(\alpha_j + b_j) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha}(\delta_{ij} - \frac{۱}{\alpha^۲}y^i y^j) + (\frac{y^i}{\alpha} + b_i)(\frac{y^j}{\alpha} + b_j).$$

ب) از تعریف قاب هللند [۴] و محاسبات نرم خاص مینکوفسکی موضعی اثبات می‌شود. □

به‌علاوه با استفاده از فرم ضرایب (۵.۳) و قضیه ۲.۱ و ۲.۲ [۷] موارد زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه ۲.۴. *نگاشت اقلیدسی متر تولید شده توسط ساختار فینسلر و انحراف بین دو متر از نوع راندرز (۵.۳) به‌صورت زیر است*

$$pr_\delta g_R \approx (\frac{۰٫۹۴۵\dot{x} - ۰٫۴۰۵\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^۲ + \dot{y}^۲}} + ۱٫۲۳۵)^۸,\ \theta_R = \arccos\frac{۱٫۸۹\alpha\dot{x} - ۰٫۸۱\alpha\dot{y} + ۲٫۴۷\alpha^۲}{\sqrt{r}}.$$

۲.۴. **ساختارهای اقلیدسی القا شده.** تساوی متناظر از قضیه ۲.۱ و ۲.۲ [۲] فاکتور مسطح و زاویه انحرافی ثابت ایجاد می‌کند.

$$\mathrm{pr}_\delta g_E \approx ۰٫۷۲\delta, \quad \theta_E = ۰٫۷۱.$$

۳.۴. **ساختار نوع ریشه چهارم.** جایگزینی پارامترهای a, b, c, d, e در معادلات ۲.۱ و ۲.۲ [۷] نتیجه زیر را خواهد داد.

نتیجه ۳.۴. *طرح اقلیدسی سازگار با متر تولید شده با ساختار فینسلر نوع رریشه چهارم (۶.۳) و زاویه انحرافی بین متر و نگاشت آن به‌صورت زیر است*

$$pr_\delta g_Q = \frac{۱}{۱۶F_Q^۶}P\delta, \quad \theta_Q = \arccos\frac{P}{\sqrt{۲}s}.$$

۵. تحلیل

نرم فینسلر راندرز به‌دست آمده، اطلاعاتی از پیش‌بینی بیماری را نشان می‌دهد. ضرایب $(b_۱, b_۲)$ به سلول‌های در حال تکثیر در سیستم دینامیکی اشاره دارد. نرم‌های فینسلر ریشه چهارم و اقلیدسی نیز خواص متفاوتی از تغییر تعداد سلول‌ها را به نمایش می‌گذارد.

۶. نتایج

نرم فینسلری که با داده‌های ارائه شده توسط سیستم دینامیکی گارنر متناسب است ساخته شده است. این کار منجر به ساختار فینسلر راندرز از نوع مینکوفسکی می‌شود که تغییرات میدان برداری گارنر را توضیح می‌دهد. این نرم، متری برای تغییر وضعیت سلول‌های سرطانی در حال تکثیر را ارائه می‌دهد، با توجه به افزایش فاکتور رشد h در سیستم گارنر که دینامیک (ازدیاد، مرگ، کاهش) را تغییر می‌دهد امکان تخمین نسبی تغییر بر اساس نمونه‌های آزمایشگاهی بعدی را فراهم می‌کند. همچنین انحراف از چارچوب اقلیدسی معمولی توسط زاویه تشکیل شده در نقشه اقلیدسی معمولی که در فضای هیلبرت $d-$تانسورهای محاسبه شده است با حاصل‌ضرب اسکالر بین تانسورها توصیف می‌شود. پیشرفت‌های بیشتر در مورد اطلاعات ارائه شده توسط نرم‌های فینسلری نسبت به سیستم دینامیکی در مطالعات آینده قابل ارائه است.

مراجع

[1] Freyer, James P., and Robert M. Sutherland. "Regulation of growth saturation and development of necrosis in EMT6/Ro multicellular spheroids by the glucose and oxygen supply." Cancer research 46, no. **7** (1986), 3504-3512.

[2] Balan, Vladimir, and Ileana Rodica Nicola. "Static bifurcation diagrams and the universal unfolding for cancer cell population model." In Proceedings of the 9th WSEAS International Conference on Mathematics & Computers In Biology & Chemistry, 2008, 229-233.

[3] Garner, Allen L., Y. Y. Lau, David W. Jordan, Michael D. Uhler, and Ronald M. Gilgenbach. "Implications of a simple mathematical model to cancer cell population dynamics." Cell proliferation 39, no. 1 (2006), 15-28.

[4] Bucataru, Ioan, and Radu Miron. Finsler-Lagrange geometry: Applications to dynamical systems. Buchurest: Editura Academiei Romane, 2007.

[5] Cheng, Xinyue, and Zhongmin Shen. "Finsler geometry." An approach via Randers spaces, 2012.

[6] Chern, Shiing-Shen, and Zhongmin Shen. Riemann-finsler geometry. Vol. 6. World Scientific Publishing Company, 2005.

[7] Balan, Vladimir, and Jelena Stojanov. "Finsler-type estimators for the cancer cell population dynamics." Publications de l'Institut Mathematique 98, no. **112** (2015), 53-69.

دانشگاه تبریز، دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی محض

آدرس پست الکترونیکی: lseyedhatami@gmail.com

دانشگاه تبریز، دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی محض

آدرس پست الکترونیکی: faghfouri@tabrizu.ac.ir